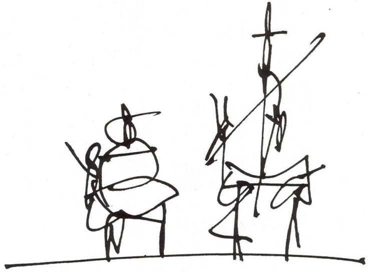
Por ver que tiene este caso un no se qué ... yo, por mi parte, os oiré, hermano, de muy buena gana, y así lo harán todos estos señores, por lo mucho que tienen de discretos y de ser amigos de curiosas novedades que suspendan, alegren y entretengan los sentidos, como, sin duda, pienso que lo ha de hacer vuestro cuento.

Comenzad, pues, amigo, que todos escucharemos.

[[Quijote I, cap 50]]



El Quijote

Herramientas matemáticas para la información imperfecta

(Álgebra y Lógica para la Computación)

Manuel Ojeda-Aciego

Dept Matemática Aplicada
Universidad de Málaga, Spain

Cádiz, 18 de noviembre de 2019

¿Por qué los matemáticos «desconfían» de los lógicos?

- En su *"Discurso del método"*, Descartes afirmaba de la Lógica que

  «sus silogismos son más útiles para exponer nuestro conocimiento a los demás que para aprender algo nuevo».

- Aunque hay que tener en cuenta que también puso pegas a la Geometría, por estar

  «demasiado ligada a representaciones gráficas».

- Y también al Álgebra, a la que definía como

  «un montón de reglas para los signos».

- En su *"Discurso del método"*, Descartes afirmaba de la Lógica que

  «sus silogismos son más útiles para exponer nuestro conocimiento a los demás que para aprender algo nuevo».

- Aunque hay que tener en cuenta que también puso pegas a la Geometría, por estar

  «demasiado ligada a representaciones gráficas».

- Y también al Álgebra, a la que definía como

  «un montón de reglas para los signos».

- En su *"Discurso del método"*, Descartes afirmaba de la Lógica que

  «sus silogismos son más útiles para exponer nuestro conocimiento a los demás que para aprender algo nuevo».

- Aunque hay que tener en cuenta que también puso pegas a la Geometría, por estar

  «demasiado ligada a representaciones gráficas».

- Y también al Álgebra, a la que definía como

  «un montón de reglas para los signos».

Lógica y Matemáticas

¿Por qué los matemáticos «desconfían» de los lógicos?

- En su *"Discurso del método"*, Descartes afirmaba de la Lógica que

  «sus silogismos son más útiles para exponer nuestro conocimiento a los demás que para aprender algo nuevo».

- Aunque hay que tener en cuenta que también puso pegas a la Geometría, por estar

  «demasiado ligada a representaciones gráficas».

- Y también al Álgebra, a la que definía como

  «un montón de reglas para los signos».

Lógica y Matemáticas

Cargos de la acusación

1. La Lógica Formal lleva consigo una filosofía «inaceptable»: la eliminación del sentido de las construcciones matemáticas.
2. Llevada hasta el extremo, la Lógica provoca que la Matemática pase a ser una caricatura de sí misma.
3. Si bien es cierto que la Lógica proporciona la única definición precisa de «demostración», ésta provoca cierto desasosiego, puesto que una formalización completa se atisba como inviable.
4. Un mayor desasosiego provoca (o, al menos, debería) el *Teorema de Incompletitud de Gödel*, que elimina la posibilidad de una formalización total.

1. La Lógica Formal lleva consigo una filosofía «inaceptable»: la eliminación del sentido de las construcciones matemáticas.
2. Llevada hasta el extremo, la Lógica provoca que la Matemática pase a ser una caricatura de sí misma.
3. Si bien es cierto que la Lógica proporciona la única definición precisa de «demostración», ésta provoca cierto desasosiego, puesto que una formalización completa se atisba como inviable.
4. Un mayor desasosiego provoca (o, al menos, debería) el *Teorema de Incompletitud de Gödel*, que elimina la posibilidad de una formalización total.

Lógica y Matemáticas

Cargos de la acusación

1. La Lógica Formal lleva consigo una filosofía «inaceptable»:
   la eliminación del sentido de las construcciones matemáticas.
2. Llevada hasta el extremo, la Lógica provoca que la Matemática pase a ser una caricatura de sí misma.
3. Si bien es cierto que la Lógica proporciona la única definición precisa de «demostración», ésta provoca cierto desasosiego, puesto que una formalización completa se atisba como inviable.
4. Un mayor desasosiego provoca (o, al menos, debería) el *Teorema de Incompletitud de Gödel*, que elimina la posibilidad de una formalización total.

1. La Lógica Formal lleva consigo una filosofía «inaceptable»: la eliminación del sentido de las construcciones matemáticas.
2. Llevada hasta el extremo, la Lógica provoca que la Matemática pase a ser una caricatura de sí misma.
3. Si bien es cierto que la Lógica proporciona la única definición precisa de «demostración», ésta provoca cierto desasosiego, puesto que una formalización completa se atisba como inviable.
4. Un mayor desasosiego provoca (o, al menos, debería) el *Teorema de Incompletitud de Gödel*, que elimina la posibilidad de una formalización total.

Muchos de los cargos anteriores suelen ser presentados *ex ignorantia*.

En dichos alegatos, muchas veces se aprecia dificultad en diferenciar las siguientes situaciones:

1. Definir con precisión la sintaxis de un lenguaje.
2. Usarlo como medio de comunicación.
3. Asumir que es un objeto matemático digno de ser estudiado.

Muchos de los cargos anteriores suelen ser presentados *ex ignorantia*.

En dichos alegatos, muchas veces se aprecia dificultad en diferenciar las siguientes situaciones:

1. Definir con precisión la sintaxis de un lenguaje.
2. Usarlo como medio de comunicación.
3. Asumir que es un objeto matemático digno de ser estudiado.

Muchos de los cargos anteriores suelen ser presentados *ex ignorantia*.

En dichos alegatos, muchas veces se aprecia dificultad en diferenciar las siguientes situaciones:

1. Definir con precisión la sintaxis de un lenguaje.
2. Usarlo como medio de comunicación.
3. Asumir que es un objeto matemático digno de ser estudiado.

Muchos de los cargos anteriores suelen ser presentados *ex ignorantia*.

En dichos alegatos, muchas veces se aprecia dificultad en diferenciar las siguientes situaciones:

1. Definir con precisión la sintaxis de un lenguaje.
2. Usarlo como medio de comunicación.
3. Asumir que es un objeto matemático digno de ser estudiado.

Muchos de los cargos anteriores suelen ser presentados *ex ignorantia*.

En dichos alegatos, muchas veces se aprecia dificultad en diferenciar las siguientes situaciones:

1. Definir con precisión la sintaxis de un lenguaje.
2. Usarlo como medio de comunicación.
3. Asumir que es un objeto matemático digno de ser estudiado.

- No es lo mismo hablar <u>en</u> inglés que hablar <u>sobre</u> el idioma inglés.
- El diccionario de la RAE nos indica que «*metalenguaje*» es el lenguaje que se usa para hablar del lenguaje.
- De modo similar, la «metalógica» es la lógica que se utiliza para estudiar la lógica, y la «metamatemática» es el estudio de la propia matemática como objeto de estudio matemático.
- Los matemáticos nunca discuten de metamatemáticas, de hecho, rara vez la suelen mencionar, casi siempre de forma superficial y en relación con el programa de Hilbert.

- No es lo mismo hablar en inglés que hablar sobre el idioma inglés.
- El diccionario de la RAE nos indica que «*metalenguaje*» es el lenguaje que se usa para hablar del lenguaje.
- De modo similar, la «metalógica» es la lógica que se utiliza para estudiar la lógica, y la «metamatemática» es el estudio de la propia matemática como objeto de estudio matemático.
- Los matemáticos nunca discuten de metamatemáticas, de hecho, rara vez la suelen mencionar, casi siempre de forma superficial y en relación con el programa de Hilbert.

- No es lo mismo hablar <u>**en**</u> inglés que hablar <u>**sobre**</u> el idioma inglés.
- El diccionario de la RAE nos indica que «*metalenguaje*» es el lenguaje que se usa para hablar del lenguaje.
- De modo similar, la «metalógica» es la lógica que se utiliza para estudiar la lógica, y la «metamatemática» es el estudio de la propia matemática como objeto de estudio matemático.
- Los matemáticos nunca discuten de metamatemáticas, de hecho, rara vez la suelen mencionar, casi siempre de forma superficial y en relación con el programa de Hilbert.

- No es lo mismo hablar **en** inglés que hablar **sobre** el idioma inglés.
- El diccionario de la RAE nos indica que «*metalenguaje*» es el lenguaje que se usa para hablar del lenguaje.
- De modo similar, la «metalógica» es la lógica que se utiliza para estudiar la lógica, y la «metamatemática» es el estudio de la propia matemática como objeto de estudio matemático.
- Los matemáticos nunca discuten de metamatemáticas, de hecho, rara vez la suelen mencionar, casi siempre de forma superficial y en relación con el programa de Hilbert.

¿Metamatemática?

¿Hay algún ejemplo facilito? Sí, y basado en los postulados de Euclides

La geometría de Euclides ($\approx$ 300 a.C.) está basada en los cinco postulados siguientes:

1. Dos puntos cualesquiera pueden ser unidos por un segmento.
2. Todo segmento se puede prolongar indefinidamente y formar una recta.
3. Es posible construir un círculo dados su centro y su radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

¿Metamatemática?

¿Hay algún ejemplo facilito? Sí, y basado en los postulados de Euclides

La geometría de Euclides ($\approx$ 300 a.C.) está basada en los cinco postulados siguientes:

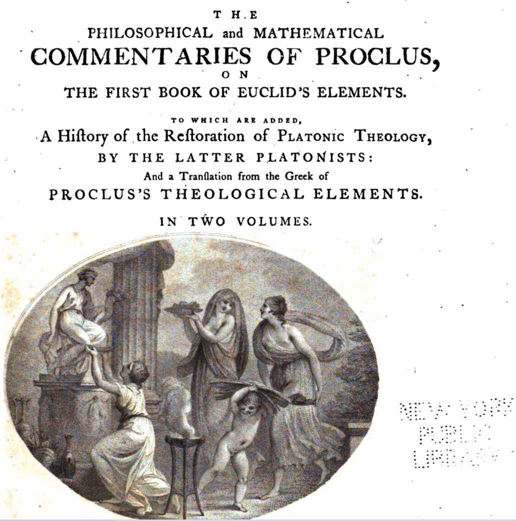
1. Dos puntos cualesquiera pueden ser unidos por un segmento.
2. Todo segmento se puede prolongar indefinidamente y formar una recta.
3. Es posible construir un círculo dados su centro y su radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

La geometría de Euclides ($\approx$ 300 a.C.) está basada en los cinco postulados siguientes:

1. Dos puntos cualesquiera pueden ser unidos por un segmento.
2. Todo segmento se puede prolongar indefinidamente y formar una recta.
3. Es posible construir un círculo dados su centro y su radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

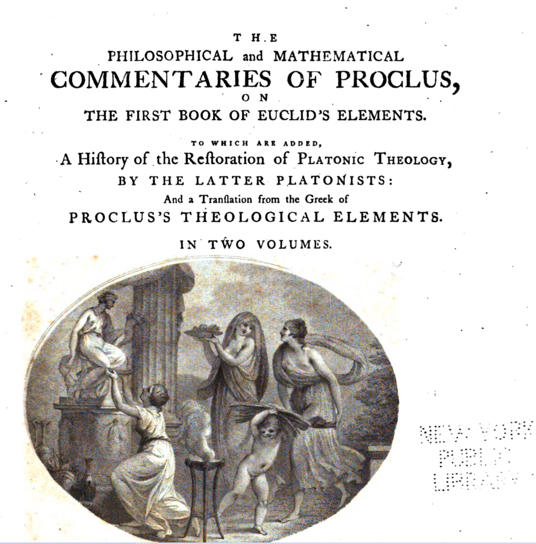
Sobre el quinto postulado de Euclides

- Durante mucho tiempo se intentó probar a partir de los otros postulados.
- En *Comentarios al Primer Libro de Euclides* de Proclo (≈ 450 d.C.) aparece descrito de forma más simple (*axioma de Playfair*): «*Por un punto exterior a una recta a lo sumo es posible trazar una paralela a dicha recta*».
- Se observó, finalmente, que era un postulado independiente.


THE
PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL
COMMENTARIES OF PROCLUS,
ON
THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.
TO WHICH ARE ADDED,
A Hiſtory of the Reſtoration of PLATONIC THEOLOGY,
BY THE LATTER PLATONISTS:
And a Tranſlation from the Greek of
PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.
IN TWO VOLUMES.

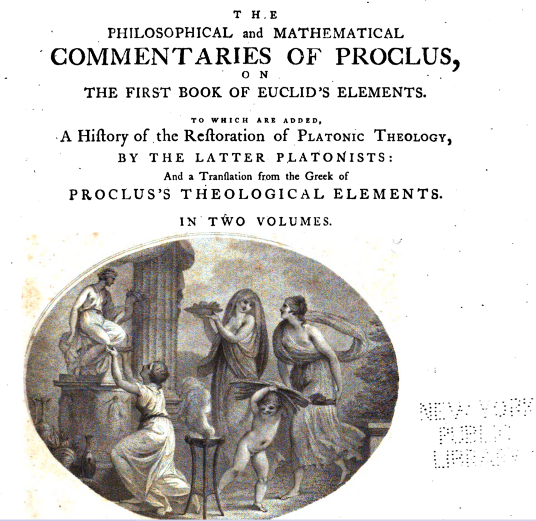
Sobre el quinto postulado de Euclides

- Durante mucho tiempo se intentó probar a partir de los otros postulados.
- En *Comentarios al Primer Libro de Euclides* de Proclo ($\approx$ 450 d.C.) aparece descrito de forma más simple (*axioma de Playfair*): *«Por un punto exterior a una recta a lo sumo es posible trazar una paralela a dicha recta»*.
- Se observó, finalmente, que era un postulado independiente.


THE
PHILOSOPHICAL and MATHEMATICAL
COMMENTARIES OF PROCLUS,
ON
THE FIRST BOOK OF EUCLID'S ELEMENTS.
TO WHICH ARE ADDED,
A Hiſtory of the Reſtoration of PLATONIC THEOLOGY,
BY THE LATTER PLATONISTS:
And a Tranſlation from the Greek of
PROCLUS'S THEOLOGICAL ELEMENTS.
IN TWO VOLUMES.

Sobre el quinto postulado de Euclides

- Durante mucho tiempo se intentó probar a partir de los otros postulados.
- En *Comentarios al Primer Libro de Euclides* de Proclo ($\approx$ 450 d.C.) aparece descrito de forma más simple (*axioma de Playfair*): «*Por un punto exterior a una recta a lo sumo es posible trazar una paralela a dicha recta*».
- Se observó, finalmente, que era un postulado independiente.



Geometrías no euclídeas

Es más, es posible obtener una teoría de la geometría sin contradicciones al sustituirlo por otros tales como

1. Por un punto exterior a una recta **no es posible trazar** una única paralela a dicha recta.
2. Por un punto exterior a una recta **es posible trazar infinitas** paralelas a dicha recta.

Consecuencias

- Existen distintas definiciones de geometría.
- Todas son igualmente válidas desde un punto de vista formal.
- ¡¡Incluso parece ser que el mundo real no se corresponde con la geometría euclídea, sino con alguna de sus parientes raras!!

Geometrías no euclídeas

Es más, es posible obtener una teoría de la geometría sin contradicciones al sustituirlo por otros tales como

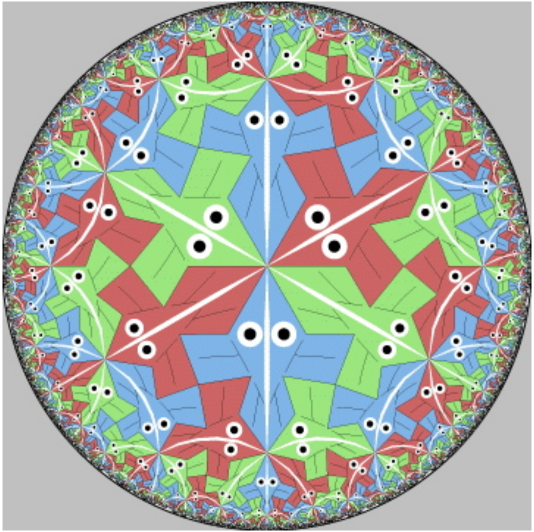
1. Por un punto exterior a una recta **no es posible trazar** una única paralela a dicha recta.
2. Por un punto exterior a una recta **es posible trazar infinitas** paralelas a dicha recta.

Consecuencias

- Existen distintas definiciones de geometría.
- Todas son igualmente válidas desde un punto de vista formal.
- ¡¡Incluso parece ser que el mundo real no se corresponde con la geometría euclídea, sino con alguna de sus parientes raras!!

Geometrías no euclídeas

Cuadrados hiperbólicos en un cuadro de Escher



- Fue George Boole, en 1847 en su «El análisis matemático de la lógica», quien introdujo un análisis de la lógica tradicional de Aristótéles desde un punto de vista algebraico.
- En 1854, en su libro «Las leyes del pensamiento», continuó con el estudio de la lógica aristotélica:
  1. Proporcionando fundamentos matemáticos que involucran ecuaciones.
  2. Ampliando la clase de problemas que podía tratar interpretando la validez en términos de la solución de ecuaciones.
  3. Extendiendo el rango de las aplicaciones que podía manejar, es decir, pasando de proposiciones con solo dos términos a proposiciones con un número arbitrario de ellos.

- Fue George Boole, en 1847 en su «El análisis matemático de la lógica», quien introdujo un análisis de la lógica tradicional de Aristóteles desde un punto de vista algebraico.
- En 1854, en su libro «Las leyes del pensamiento», continuó con el estudio de la lógica aristotélica:
  1. Proporcionando fundamentos matemáticos que involucran ecuaciones.
  2. Ampliando la clase de problemas que podía tratar interpretando la validez en términos de la solución de ecuaciones.
  3. Extendiendo el rango de las aplicaciones que podía manejar, es decir, pasando de proposiciones con solo dos términos a proposiciones con un número arbitrario de ellos.

El lógico polaco Jan Łukasiewicz proporcionó el siguiente sistema de axiomas para la lógica clásica proposicional

Ax1 $P \to (Q \to P)$

Ax2 $(P \to (Q \to R)) \to (P \to Q) \to (P \to R))$

Ax3 $((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P))$

junto con el esquema de inferencia del Modus Ponens, es decir a partir de A y $A \to B$ se puede inferir lógicamente B.

Y digo yo:

¿Hay mucha diferencia entre esto y, por ejemplo, la teoría de grupos?

El lógico polaco Jan Łukasiewicz proporcionó el siguiente sistema de axiomas para la lógica clásica proposicional

Ax1 $P \to (Q \to P)$

Ax2 $\big(P \to (Q \to R)\big) \to \big(P \to Q\big) \to \big(P \to R\big)$

Ax3 $\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big)$

junto con el esquema de inferencia del Modus Ponens, es decir a partir de A y $A \to B$ se puede inferir lógicamente B.

Y digo yo:

¿Hay mucha diferencia entre esto y, por ejemplo, la teoría de grupos?

Otros sistemas lógicos

Hitos importantes

- Aristóteles, Ockham Los futuros contingentes.
- Łukasiewicz'20 Lógica trivaluada de la «posibilidad».
- Post'20 Lógicas multivaluadas con completitud funcional.
- Heyting'30 Lógica trivaluada para el intuicionismo.
- Gödel'32 Lógicas finito valuadas como aproximación de la lógica intuicionista.
- Bočvar'38 Lógica de las paradojas.
- Kleene'52 Lógica de lo «indefinido».

- Zadeh'65 Lógica difusa (en sentido amplio).
- Pavelka'79 Lógica difusa proposicional (en sentido estricto).
- Novák'90 Lógica difusa de primer orden.
- Hájek'95 Lógica difusa racional.

Moraleja

No se debe buscar la *única lógica verdadera*, sino la que mejor se adapte a nuestro problema.

- Zadeh'65 Lógica difusa (en sentido amplio).
- Pavelka'79 Lógica difusa proposicional (en sentido estricto).
- Novák'90 Lógica difusa de primer orden.
- Hájek'95 Lógica difusa racional.

Moraleja

No se debe buscar la *única lógica verdadera*, sino la que mejor se adapte a nuestro problema.

Referencias bibliográficas

Burrieza, Muñoz-Velasco, MOA.
A PDL approach for qualitative velocity. **Intl J of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-based Systems**, 19(1):11-26, 2011.

Burrieza, Muñoz-Velasco, MOA.
A logic framework for reasoning with movement based on fuzzy qualitative representation. **Fuzzy Sets and Systems**, 242:114-131, 2014.

Burrieza, Muñoz-Velasco, MOA.
A multimodal logic for closeness. **J. of Applied Non-Classical Logics**, 27:225-237, 2017.

Burrieza, Muñoz-Velasco, MOA.
Logics for order-of-magnitude qualitative reasoning: formalizing negligibility. In *Ewa Orłowska on Relational Methods in Logic and Computer Science*, chapter 8. Springer, 2018

Burrieza, Muñoz-Velasco, MOA.
A flexible logic-based approach to closeness using order of magnitude qualitative reasoning. **Logic Journal of the IGPL**, 2020 (To appear).

- La influencia de los conjuntos difusos ha sido fundamental en el desarrollo de lógicas valuadas sobre el intervalo unidad $[0,1]$.
- Están basadas sobre la abstracción de la conjunción que proporcionan las normas triangulares (o t-normas).

Definición

Una *t-norma* es una operación binaria sobre $[0,1]$ asociativa, conmutativa, no decreciente y con elemento neutro 1.

- La influencia de los conjuntos difusos ha sido fundamental en el desarrollo de lógicas valuadas sobre el intervalo unidad $[0,1]$.
- Están basadas sobre la abstracción de la conjunción que proporcionan las normas triangulares (o t-normas).

Definición

Una *t-norma* es una operación binaria sobre $[0,1]$ asociativa, conmutativa, no decreciente y con elemento neutro 1.

Dada una t-norma continua T, existe una forma estándar de definir su implicación residuada

Definición (Implicación residuada)

$$u \to v = \sup\{z \mid T(u,z) \leq v\}$$

Esta implicación está relacionada con T mediante el siguiente

Teorema (Propiedad de adjunción)

Cada t-norma continua tiene una única implicación residuada, puesto que se cumple

$$T(u,v) \leq w \text{ si y solo si } u \leq (v \to w),$$

Dada una t-norma continua T, existe una forma estándar de definir su implicación residuada

Definición (Implicación residuada)

$$u \to v = \sup\{z \mid T(u,z) \leq v\}$$

Esta implicación está relacionada con T mediante el siguiente

Teorema (Propiedad de adjunción)

Cada t-norma continua tiene una única implicación residuada, puesto que se cumple

$$T(u,v) \leq w \text{ si y solo si } u \leq (v \to w),$$

- Toda t-norma determina la función de verdad de una conjunción.
- Su residuo determina la función de verdad de una implicación.
- El lenguaje se puede dotar de una negación haciendo $\neg u = u \to 0$.
- Por lo tanto, una t-norma permite definir la semántica de una lógica difusa.

Definición

Un retículo residuado es una tupla $(L, \preceq, \&, \to, \top)$ tal que

1. $\langle L, \preceq \rangle$ es un retículo acotado en el que $\top$ es su elemento máximo.
2. $\langle L, \&, \top \rangle$ es un monoide conmutativo.
3. El par $\langle \&, \to \rangle$ es un *par adjunto* en L: para todo $x, y, z \in L$

$$x \preceq (z \to y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\&\, z) \preceq y$$

- Toda t-norma determina la función de verdad de una conjunción.
- Su residuo determina la función de verdad de una implicación.
- El lenguaje se puede dotar de una negación haciendo $\neg u = u \to 0$.
- Por lo tanto, una t-norma permite definir la semántica de una lógica difusa.

Definición

Un retículo residuado es una tupla $(L, \preceq, \&, \to, \top)$ tal que

1. $\langle L, \preceq \rangle$ es un retículo acotado en el que $\top$ es su elemento máximo.
2. $\langle L, \&, \top \rangle$ es un monoide conmutativo.
3. El par $\langle \&, \to \rangle$ es un *par adjunto* en L: para todo $x, y, z \in L$

$$x \preceq (z \to y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x \,\&\, z) \preceq y$$

Mayor generalización

Los retículos multiadjuntos

Permitir el uso de distintos tipos de implicación proporciona mayor flexibilidad a nuestro lenguaje.

Definición (Medina, MOA & Vojtáš, 2001)

Un retículo multiadjunto es una tupla $(L, \preceq, \rightarrow_1, \&_1, \dots, \rightarrow_n, \&_n)$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle L, \preceq \rangle$ es un retículo completo;
2. $(\rightarrow_i, \&_i)$ es un par adjunto en $\langle L, \preceq \rangle$ para todo $i = 1, \dots, n$;
3. $\top \&_i \vartheta = \vartheta \&_i \top = \vartheta$ para todo $\vartheta \in L$ y todo $i = 1, \dots, n$.

Definición (Medina, MOA & Vojtáš, 2001)

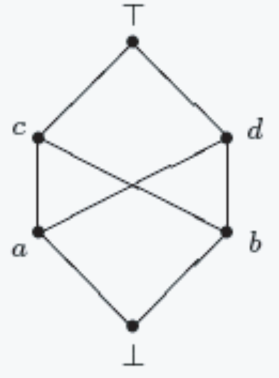
Dados posets $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$, $(P_3, \leq_3)$ junto con aplicaciones $\&\colon P_1 \times P_2 \to P_3$, $\swarrow\colon P_3 \times P_2 \to P_1$, $\nwarrow\colon P_3 \times P_1 \to P_2$ decimos que $(\&, \swarrow, \nwarrow)$ es un *triple adjunto* con respecto a P_1, P_2, P_3 si:

1. $\&$ es creciente en ambos argumentos.
2. $\swarrow$ y $\nwarrow$ son crecientes en el consecuente y decrecientes en el antecedente.
3. $x \leq_1 z \swarrow y \quad$ sii $\quad x \,\&\, y \leq_3 z \quad$ sii $\quad y \leq_2 z \nwarrow x$, donde $x \in P_1$, $y \in P_2$ y $z \in P_3$.

Mayor generalización

Multirretículos

En un multirretículo se generaliza la condición de existencia de cota superior *mínima* por cotas superiores **minimales**, y de cota inferior *máxima* por cotas inferiores **maximales**.



Referencias bibliográficas I

Medina, MOA, Ruiz.

Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. **Fuzzy Sets and Systems**, 160(2):130-144, 2009

Medina, MOA.

Multi-adjoint t-concept lattices. **Information Sciences**, 180(5):712-725, 2010

Medina, MOA.

On multi-adjoint concept lattices based on heterogeneous conjunctors. **Fuzzy Sets and Systems**, 208:95-110, 2012

Medina, MOA.

Dual multi-adjoint concept lattices. **Information Sciences**, 225:47-54, 2013

Referencias bibliográficas II

Konecny, Medina, MOA.

Multi-adjoint concept lattices with heterogeneous conjunctors and hedges. **Annals of Mathematics and Artificial Intelligence**, 72(1-2):73-89, 2014

Díaz, Medina, MOA.

On basic conditions to generate multi-adjoint concept lattices via Galois connections. **Intl Journal of General Systems**, 43(2):149-161, 2014

Julián, Medina, MOA.

On reductants in the framework of multiadjoint logic programming. **Fuzzy Sets and Systems**, 317:27-43, 2017

Medina, MOA, Ruiz.

Fuzzy logic programming via multilattices. **Fuzzy Sets and Systems**, 158(6):674-688, 2007

Referencias bibliográficas III

Cabrera, Cordero, Gutiérrez, Martínez, MOA.

A coalgebraic approach to non-determinism: applications to multilattices. **Information Sciences**, 180(22):4323-4335, 2010

Cabrera, Cordero, Gutiérrez, Martínez, MOA.

Finitary coalgebraic multisemilattices and multilattices. **Applied Mathematics and Computation**, 219(1):31-44, 2012

Cabrera, Cordero, Gutiérrez, Martínez, MOA.

On residuation in multilattices: filters, congruences, and homomorphisms. **Fuzzy Sets and Systems**, 234:1-21, 2014

Medina, MOA, Pócs, Ramírez-Poussa.

On the Dedekind-MacNeille completion and formal concept analysis based on multilattices. **Fuzzy Sets and Systems**, 303:1-20, 2016

Virtud es—respondió Sancho—, conocer esas yerbas, que, según yo me voy imaginando, algún día será menester usar de ese conocimiento.

[[Quijote I, cap 10]]

El Quijote (1991-1992)
@ RTVE

- La adjunción es la generalización categórica de la residuación.
- Tanto la adjunción (como su pariente la conexión de Galois) son construcciones extremadamente interesantes y, además, pueden estudiarse en el marco más simple de las estructuras ordenadas.

Definición (Adjunción [Ore, 1944])

Sean $\mathbb{A} = \langle A, \leq_A \rangle$ y $\mathbb{B} = \langle B, \leq_B \rangle$ dos posets. Un par de aplicaciones $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ se dice que forman una *adjunción entre* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}$, y la denotamos $(f, g)\colon \mathbb{A} \leftrightharpoons \mathbb{B}$, si para todo $a \in A$ y $b \in B$ tenemos

$$f(a) \leq_B b \qquad \text{si y solo si} \qquad a \leq_A g(b)$$

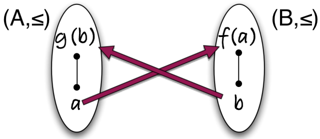
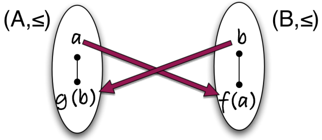
Observación

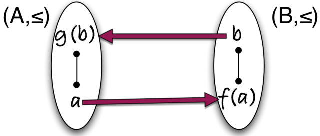
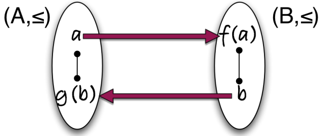
Nótese que es posible considerar estructuras alternativas para los conjuntos A y B de la definición previa.
Por ejemplo, en lugar de posets podríamos considerar conjuntos preordenados, órdenes o preórdenes difusos (con o sin igualdad difusa), etc.

Sobre la noción de adjunción

Conexiones de Galois vs Adjunciones

Dadas dos aplicaciones $f\colon (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ y $g\colon (B, \leq_B) \to (A, \leq_A)$

Conexiones de Galois entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$	
Right. $(f, g)\colon (A, \leq_A) \leftharpoonup\!\rightharpoonup (B, \leq_B)$	**Left.** $(f, g)\colon (A, \leq_A) \leftharpoondown\!\rightharpoondown (B, \leq_B)$
	

Adjunciones entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$	
Adj. $(f, g)\colon (A, \leq_A) \leftrightharpoons (B, \leq_B)$	**Co-adj.** $(f, g)\colon (A, \leq_A) \rightleftharpoons (B, \leq_B)$
	

Podemos encontrar artículos sobre adjunciones (o conexiones de Galois) desde el punto de vista más teórico hasta el más aplicado.

Ejemplos de adjunciones/conexiones de Galois

1. Construcción de Programas [abstracción / concretización, mónadas]
2. Problemas de satisfacción de restricciones [restricciones / constructos]
3. Lógica (difusa o no) [sintaxis / semántica]
4. Morfología matemática (difusa o no) [dilatación / erosión]
5. Análisis de Conceptos Formales (difusos o no) [operadores de construcción de conceptos]

Sobre la construcción de adjunciones

El problema: en pocas palabras y un dibujito

Las Visiones del Quijote

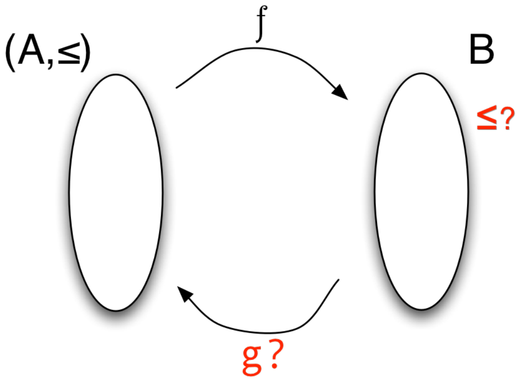
Yo no digo que sea imposible, pero téngolo por dificultoso.

[[Quijote II, cap 22]]

Sobre la construcción de adjunciones

El problema: en pocas palabras y un dibujito

- Existen caracterizaciones bien conocidas para la existencia de adjunciones *entre dos estructuras ordenadas* pero,
  ¿qué ocurre si el dominio no tiene estructura?



La construcción se basa en la descomposición canónica de f

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, two heads, shift left, "\pi"] & B \arrow[l, dashed, bend right, "g = \max\circ\varphi^{-1}\circ j_m"'] \arrow[d, dashed, shift left, "j_m"] \\
A_{\equiv_f} \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & f(A) \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[u, hook, shift left, "i"]
\end{tikzcd}$$

- El orden en $A_{\equiv_f}$ se define como $[a_1] \leq_{A_{\equiv_f}} [a_2]$ si y solo si $a_1 \leq_A \max([a_2])$
- Suponiendo $f(A) \subset B$, y un elemento fijado $m \in f(A)$, el orden en $f(A)$ se puede extender a todo B como el cierre reflexivo y transitivo de $\leq_X \cup \{(m, y) \mid y \notin X\}$.

Construcción de adjunciones

Adjunciones para un poset

La construcción se basa en la descomposición canónica de f

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, two heads, shift left, "\pi"] & B \arrow[l, dashed, bend right, "g=\max\circ\varphi^{-1}\circ j_m"'] \arrow[d, dashed, shift left, "j_m"] \\
A_{\equiv_f} \arrow[u, dashed, shift left, "\max"] \arrow[r, shift left, "\varphi"] & f(A) \arrow[l, dashed, shift left, "\varphi^{-1}"] \arrow[u, hook, shift left, "i"]
\end{tikzcd}$$

- El orden en $A_{\equiv_f}$ se define como $\quad [a_1] \leq_{A_{\equiv_f}} [a_2]$ si y solo si $a_1 \leq_A \text{máx}([a_2])$
- Suponiendo $f(A) \subset B$, y un elemento fijado $m \in f(A)$, el orden en $f(A)$ se puede extender a todo B como el cierre reflexivo y transitivo de $\leq_X \cup \{(m, y) \mid y \notin X\}$.

Teorema (Caracterización para posets)

Sea $(A, \leq_A)$ un poset y consideremos una aplicación $f\colon A \to B$.
Existe un orden $\leq_B$ in B y una aplicación $g\colon B \to A$ tal que $(f, g)\colon A \leftrightharpoons B$ si y solo si

1. *Existe* $\max([a]_{\equiv_f})$ *para todo* $a \in A$.
2. $a_1 \leq_A a_2$ *implica* $\max([a_1]_{\equiv_f}) \leq_A \max([a_2]_{\equiv_f})$, *para todo* $a_1, a_2 \in A$.

Cabrera, Cordero, García, MOA, Rodríguez
On the definition of suitable orderings to generate adjunctions over an unstructured codomain. **Information Sciences** 286: 173-187 (2014)

También incluye la caracterización para conjuntos preordenados

Teorema (Caracterización para posets)

Sea $(A, \leq_A)$ un poset y consideremos una aplicación $f: A \to B$.
Existe un orden $\leq_B$ in B y una aplicación $g: B \to A$ tal que $(f, g): A \leftrightharpoons B$ si y solo si

1. *Existe* $\max([a]_{\equiv_f})$ *para todo* $a \in A$.
2. $a_1 \leq_A a_2$ *implica* $\max([a_1]_{\equiv_f}) \leq_A \max([a_2]_{\equiv_f})$, *para todo* $a_1, a_2 \in A$.

Cabrera, Cordero, García, MOA, Rodríguez
On the definition of suitable orderings to generate adjunctions over an unstructured codomain. **Information Sciences** 286: 173-187 (2014)

También incluye la caracterización para conjuntos preordenados

Extensiones a un marco difuso

Definiciones

Dado un retículo residuado completo $\mathbb{L} = \langle L, \leq, \otimes, \rightarrow, \bot, \top \rangle$, una relación binaria $\mathbb{L}$-difusa $R\colon U \times U \rightarrow L$ se dice que es:

- *Reflexiva* si $R(a, a) = \top$, para todo $a \in U$.
- $\otimes$-*Transitiva* si $R(a, b) \otimes R(b, c) \leq R(a, c)$, para todo $a, b, c \in U$.
- *Simétrica* si $R(a, b) = R(b, a)$, para todo $a, b \in U$.
- *Antisimétrica* if $R(a, b) = R(b, a) = \top$ implica $a = b$, para todo $a, b \in U$.

Definición

- Una *relación de preorden* $\mathbb{L}$-*difusa* es una relación reflexiva y $\otimes$-transitiva.
- Una *relación de orden* $\mathbb{L}$-*difusa* es una relación reflexiva, antisimétrica y $\otimes$-transitiva.
- Una *relación de equivalencia* $\mathbb{L}$-*difusa* es una relación reflexiva, simétrica y $\otimes$-transitiva.

Definición

- *Preposet difuso*: $\mathbb{U} = \langle U, \rho_U \rangle$ donde ρ_U es un preorden difuso en U.
- *Poset difuso*: $\mathbb{U} = \langle U, \rho_U \rangle$ donde ρ_U es un orden difuso en U.

Definición

$(f, g)\colon \langle A, \rho_A\rangle \leftrightharpoons \langle B, \rho_B\rangle$ si, para todo $a \in A$ y $b \in B$, se cumple la siguiente condición

$$\rho_A(a, g(b)) = \rho_B(f(a), b)$$

Sea $f\colon A \to B$ una aplicación de un preposet difuso (A, ρ_A) a un conjunto sin estructura B. Las condiciones necesarias y suficientes para construir una relación de preorden difuso ρ_B sobre B y una aplicación residual $g\colon B \to A$ para f han sido establecidas en

Cabrera, Cordero, García, MOA, De Baets
On the construction of adjunctions between a fuzzy preposet and an unstructured set.
Fuzzy Sets and Systems, 320:81–92, 2017

Definiciones

- Una *estructura difusa* $\mathcal{A} = \langle A, \approx_A \rangle$ es un conjunto A provisto de una relación de equivalencia difusa $\approx_A$.
- Un *morfismo* entre dos estructuras difusas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es una aplicación $f\colon A \to B$ tal que $(a_1 \approx_A a_2) \leq (f(a_1) \approx_B f(a_2))$ para todo $a_1, a_2 \in A$.

Definición

Dada una estructura difusa $\mathcal{A} = (A, \approx_A)$, la terna $\mathbb{A} = \langle A, \approx_A, \rho_A \rangle$ es una *estructura preordenada difusa*, si $\rho_A\colon A \times A \to L$ es $\approx_A$-reflexiva, $\otimes$-$\approx_A$-antisimétrica y $\otimes$-transitiva, donde ρ_A es

- $\approx_A$*-reflexiva* si $(a_1 \approx_A a_2) \leq \rho_A(a_1, a_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$.
- $\otimes$-$\approx_A$*-antisimétrica* si $\rho_A(a_1, a_2) \otimes \rho_A(a_2, a_1) \leq (a_1 \approx_A a_2)$ para todo $a_1, a_2 \in A$.

Definición

Sea $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos estructuras preordenadas difusas. Dados dos morfismos $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $g\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, el par (f, g) se dice que es una *conexión de Galois* entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ si se cumplen las condiciones siguientes para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $b, b_1, b_2 \in B$:

(G1) $(a_1 \approx_A a_2) \otimes \rho_A(a_2, g(b)) \le \rho_B(f(a_1), b)$;

(G2) $(b_1 \approx_B b_2) \otimes \rho_B(f(a), b_1) \le \rho_A(a,g(b_2))$;

Dada una estructura difusa preordenada $\mathbb{A} = \langle \mathcal{A}, \rho_A \rangle$, una estructura difusa $\mathcal{B}$ y un morfismo $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Las condiciones necesarias y suficientes para construir una relación de preorden difuso ρ_B sobre B y una aplicación residual $g\colon B \to A$ para f han sido establecidas en

Cabrera, Cordero, García, MOA, De Baets
Galois connections between a fuzzy preordered structure and a general fuzzy structure.
IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 26(3):1274–1287, 2018

Extensiones a un marco difuso

Estructuras relacionales y difusas

Cabrera, Cordero, Muñoz, MOA
A relational extension of Galois connections. **Lecture Notes in Artificial Intelligence** 11511:290–303, 2019

Cabrera, Cordero, Muñoz, MOA, De Baets
Relational Galois connections between transitive digraphs: characterization and construction. **Information Sciences**, 2020. To appear

Cabrera, Cordero, Muñoz, MOA, De Baets
Relational Galois connections between transitive fuzzy digraphs. 2020. En revisión.

Cabrera, Cordero, Muñoz, MOA, De Baets
Relational fuzzy Galois connections between transitive fuzzy digraphs. En preparación ¿2021?

No, realmente, no hay 324 transparencias

No, realmente, no hay 324 transparencias

No te tomes la vida demasiado en serio, al fin y al cabo no saldrás vivo de ella.

[[Les Luthiers]]

Daniel Rabinovich
(18/11/1943–21/08/2015)

¡Muchas gracias por su atención!

Y estas son las maravillas que dije que os había de contar. Y si no os lo han parecido, no sé otras.

[[Quijote II, cap 25]]

Man of La Mancha (1972)

Herramientas matemáticas para la información imperfecta

(Álgebra y Lógica para la Computación)

Manuel Ojeda-Aciego

Dept Matemática Aplicada
Universidad de Málaga, Spain

Cádiz, 18 de noviembre de 2019