Semigrupos de ramas planas

Evelia R. García Barroso

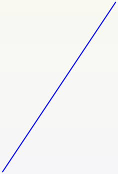
Universidad de La Laguna, Tenerife

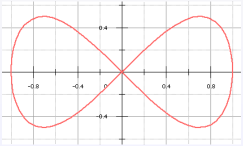
IV Jornadas doctorales del Doctorado en Matemáticas
Cádiz 20-21, noviembre 2018

Curvas algebraicas planas

Una curva algebraica plana es el conjunto de ceros de un polinomio complejo $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, es decir

$$\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \ : \ f(a, b) = 0\}.$$





Universidad de La Laguna

Puntos singulares

Estamos interesados en curvas con puntos singulares , es decir puntos $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tales que

$$f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Ejemplo

El origen es el único punto singular de la lemniscata.

Problemas:

- Resolución de singularidades.
- Clasificación de singularidades.

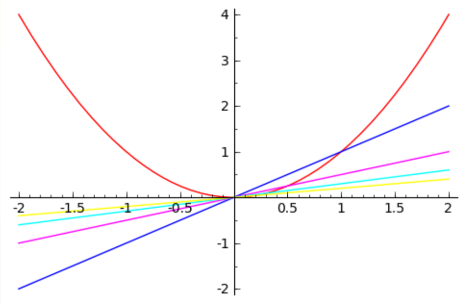
Primeras definiciones: rama plana

Una **rama** es una curva $\{f = 0\}$, donde $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ (o $\mathbb{C}[[x]][y]$) es irreducible.

Clasificación de singularidades: equisingularidad.

Universidad de La Laguna

Primeras definiciones: multiplicidad de intersección



Primeras definiciones: multiplicidad de intersección

Sean $f, g \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Definimos la **multiplicidad de intersección** $i_0(f, g)$ como

$$i_0(f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x, y]]/(f, g),$$

donde (f, g) es el ideal de $\mathbb{C}[[x, y]]$ generado por f y g.

Propiedad

Sean f, g dos series no nulas sin término constante. Entonces $i_0(f, g) < +\infty$ si y solo si $\{f = 0\}$ y $\{g = 0\}$ no tienen ramas en común.

Primeras definiciones: semigrupo de una rama

Propiedades

- $i_0(f, g_1 g_2) = i_0(f, g_1) + i_0(f, g_2)$.
- $i_0(f, 1) = 0$.

Para toda serie irreducible $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$, ponemos

$$\Gamma(f) = \{i_0(f, g) \;:\; g \in \mathbb{C}[[x, y]],\; g \not\equiv 0 \pmod{f}\}\,.$$

$\Gamma(f)$ es un semigrupo denominado **semigrupo asociado a la rama** $\{f = 0\}$.

Teorema (Zariski)

Dos ramas $\{f = 0\}$ y $\{g = 0\}$ son **equisingulares** *si y solo si $\Gamma(f) = \Gamma(g)$.*

¿Cómo calcular la multiplicidad de intersección?

Teorema

Si $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ irreducible y $(x(t), y(t))$ es una parametrización de $f = 0$ entonces

$$i_0(f,g) = \mathrm{ord}_t g(x(t), y(t))$$

Ejemplo

$f(x,y) = y^2 - x^3$.
$i_0(f,x) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f,x) = \mathrm{ord}_t f(0,t) = \mathrm{ord}_t t^2 = 2$.
$i_0(f,y) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f,y) = \mathrm{ord}_t f(t,0) = \mathrm{ord}_t t^3 = 3$.

Propiedades del semigrupo de una rama

Lema

$\Gamma(f)$ *es un semigrupo numérico, es decir,* $\gcd(\Gamma(f)) = 1$*, o equivalentemente existe* $c \in \mathbf{N}$ *tal que todo* $n \in \mathbf{N}$*,* $n \geq c$ *pertenece a* $\Gamma(f)$*.*

Al número c se le denomina conductor de $\Gamma(f)$.

Lema

Existe una única sucesión $v_0, \ldots, v_h \in \Gamma(f)$ *tal que*

- $v_0 = \min(\Gamma(f) \setminus \{0\}) = \operatorname{ord} f$,
- $v_k = \min(\Gamma(f) \setminus \mathbf{N}v_0 + \cdots + \mathbf{N}v_{k-1})$ *para* $k \in \{1, \ldots, h\}$,
- $\Gamma(f) = \mathbf{N}v_0 + \cdots + \mathbf{N}v_h$.

La sucesión $v_0, \ldots, v_h$ se denomina la sucesión de generadores $\mathbf{v}_0$-minimal de $\Gamma(f)$.

Universidad de La Laguna

Ejemplos

Ejemplo

$f(x,y) = y^2 - x^3$.
$i_0(f,x) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f,x) = \mathrm{ord}_t f(0,t) = \mathrm{ord}_t t^2 = 2$.
$i_0(f,y) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f,y) = \mathrm{ord}_t f(t,0) = \mathrm{ord}_t t^3 = 3$.
$\Gamma(f) = \mathbf{N}2 + \mathbf{N}3$ y $c(f) = 2$.

Ejemplo

$f(x,y) = (y^2 - x^3)^2 - x^5 y$.
$i_0(f,x) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f,x) = \mathrm{ord}_t f(0,t) = \mathrm{ord}_t t^4 = 4$.
$\Gamma(f) = \mathbf{N}4 + ????$
$i_0(f,y) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f,y) = \mathrm{ord}_t f(t,0) = \mathrm{ord}_t t^6 = 6$.
$i_0(f, y^2 - x^3) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f,y) = \mathrm{ord}_t f(t^2, t^3) = \mathrm{ord}_t - t^{10} t^3 = 13$.
$5, 7, \ldots \in \Gamma(f)$? $\Gamma(f) = \mathbf{N}4 + \mathbf{N}6 + \mathbf{N}13$? y $c(f) = ???$

Propiedades del semigrupo

Sea $\mathbf{e_k} := \mathrm{mcd}(v_0, \ldots, v_k)$ con $k \in \{1, \ldots, h\}$. Entonces

(A) $e_0 > e_1 > \cdots e_{h-1} > e_h = 1$ y

(B) $e_{k-1} v_k < e_k v_{k+1}$ for $k \in \{1, \ldots, h-1\}$.

Sea $\mathbf{n_k} := e_{k-1}/e_k$ para $k \in \{1, \ldots, h\}$. Entonces

(a) $n_k > 1$ para $k \in \{1, \ldots, h\}$ y

(b) $n_k v_k < v_{k+1}$ para $k \in \{1, \ldots, h-1\}$.

Ejemplo

$f(x, y) = (y^2 - x^3)^2 - x^5 y.$
$i_0(f, x) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[x]][[y]]/(f, x) = \mathrm{ord}_t f(0, t) = \mathrm{ord}_t t^4 = 4.$
$\Gamma(f) = \mathbf{N}4 + \mathbf{N}6 + \mathbf{N}13.$

Propiedades del semigrupo

Proposición

- *Todo semigrupo numérico verificando* (A) *y* (B) *es el semigrupo de una rama plana.*
- *El conductor de* $\Gamma(f)$ *es*

$$c = \sum_{k=1}^{h} (n_k - 1)v_k - v_0 + 1.$$

Ejemplo

$f(x,y) = (y^2 - x^3)^2 - x^5 y.$
$\Gamma(f) = \mathbf{N}4 + \mathbf{N}6 + \mathbf{N}13.$
$e_0 = 4 > e_1 = 2 > e_2 = 1$, $n_1 = n_2 = 2$, $c(f) = 16.$

Raíces de un polinomio complejo y sus derivadas

Sea $f(y) = ay^2 + by + c \in \mathbb{C}[y]$, con $a \neq 0$.

Las raíces de $f(y)$ son

$$\alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{and} \quad \alpha_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La única raíz de su derivada $\frac{df}{dy}(y) = 2ay + b$ es $\beta = \frac{-b}{2a}$.

Pregunta: ¿Hay alguna relación entre α_1, α_2 y β ? **¡Sí!**

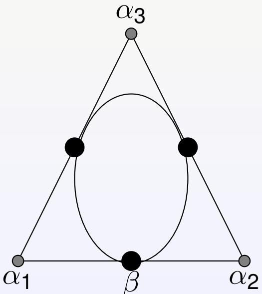
$$\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Raíces de un polinomio complejo y sus derivadas

Sea $f(y) = ay^3 + by^2 + cy + d \in \mathbb{C}[y]$, con $a \neq 0$.

Teorema (Siebeck (1864)-Marden (1945))

Si las raíces de $f(y)$ son puntos no colineales α_1, α_2, y α_3 en el plano, la raíces de $\frac{df}{dy}(y)$ son los focos de la única elipse inscrita en el triángulo determinado por α_1, α_2 y α_3 y tangente a los lados en sus puntos medios.



Situación general

Teorema (Gauss-Lucas (1879))

Si $f(y) \in \mathbb{C}[y]$ es un polinomio no constante, todas las raíces de $\frac{df}{dy}(y)$ pertenecen a la envolvente convexa del conjunto de raíces de $f(y)$.

Pregunta: ¿Qué sucede en dos variables?

Teorema de Kuo-Lu

Teorema (Kuo-Lu (1977))

Sea α_1 *una raíz de* $f = 0$*, donde* $f(x,y) \in \mathbb{C}[[x]][y]$*. Entonces*

$$\{\mathrm{ord}_t(\alpha_1 - \alpha_j)\}_j = \{\mathrm{ord}_t(\alpha_1 - \gamma_k)\}_k,$$

donde $\mathrm{Zer} f = \{\alpha_j\}_j$ *y* $\mathrm{Zer}\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dy}} = \{\gamma_k\}_k$.

La curva $\frac{df}{dy} = 0$ se denomina curva polar de $f = 0$.

Exponentes característicos

Definición

Sean $f(x, y) \in \mathbb{C}[[x]][y]$ irreducible de grado n y sea $\mathrm{Zer} f = \{\alpha_j\}_j^n$. Supongamos que $x = 0$ no es tangente a $f = 0$. Los **exponentes característicos** *de f son $\beta_0 = n < \beta_1 < \cdots < \beta_h$ tales que*

$$\{\mathrm{ord}_x(\alpha_i - \alpha_j) \ : \ i \neq j\} = \left\{\frac{\beta_i}{n}\right\} \subset \mathbb{Q}.$$

Ejemplo

$f(x, y) = y^2 - x^3 = 0$ si y solo si $y = \pm x^{3/2}$.

$$\{\mathrm{ord}_x(\alpha_i - \alpha_j) \ : \ i \neq j\} = \left\{\mathrm{ord}_x(2x^{3/2}) = \frac{3}{2}\right\}.$$

Entonces $\beta_0 = v_0 < \beta_1 = 3 = v_1$.

Relación entre el semigrupo y los exponentes característicos

Teorema (Zariski)

Sean $f(x,y) \in \mathbb{C}[[x]][y]$ irreducible de grado n y sean $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_h$ los exponentes característicos de $f = 0$. Entonces el sistema minimal de generadores de $\Gamma(f)$ es $v_0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_h$ donde

- $v_0 = \beta_0$,
- $v_1 = \beta_1$,
- $v_{k+1} = n_k v_k + \beta_{k+1} - \beta_k, \quad 1 \leq k \leq h-1.$

Corolario

Dos ramas $\{f = 0\}$ y $\{g = 0\}$ son **equisingulares** *si y solo si tienen el mismo conjunto de exponentes característicos.*

Exponentes característicos

Teorema (Dickenstein-Sessa (1983))

Let $e_{i+1} < j \leq e_i$. Then

$$\beta_{i+1} = i_0(f, f^{(j-1)}) - i_0(f, f^{(j)}).$$

Ejemplo

$f(x, y) = y^2 - x^3$, $f^{(1)} = 2y$, $f^{(2)} = 2$, $e_1 = 1 < j \leq e_0 = 2$

$$\beta_1 = i_0(f, f^{(1)}) - i_0(f, f^{(2)}) = 3 - 0 = 3$$

Entonces $\beta_0 = v_0 < \beta_1 = 3 = v_1$.

¿Cómo calcular?

Teorema

Sean $f, g \in \mathbb{C}[[x]][y]$. *Entonces*

$$i_0(f, g) = \mathrm{ord}(\mathrm{Res}_y(f, g)).$$

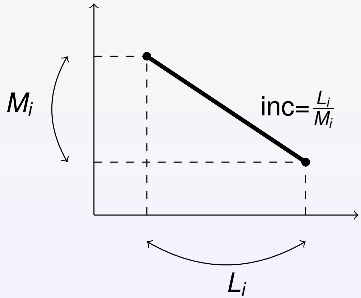
Criterio de irreducibilidad

Sea $f \in \mathbb{C}[[x]][y]$. Consideremos

$$D(u,v) := \mathrm{disc}_y(f(u,y)-v) = \mathrm{ord}(\mathrm{Res}_y(f,f_y)) \in \mathbb{C}[[u]][v],$$

y su polígono de Newton

$$\mathcal{N} = \mathrm{econvexa}\left(\mathrm{sop} D(u,v) + \mathbf{R}^2_+\right) = \sum_{i=1}^{h} \left\{\frac{L_i}{M_i}\right\}.$$



Criterio de irreducibilidad

Sean
$H_0 = 1$, $H_i = 1 + M_1 + \cdots + M_i$ para $i \in \{1, \ldots, h\}$ y
$C_0 = H_h$, $C_i = H_{i-1} L_i / M_i$ para $i \in \{1, \ldots, h\}$.

Teorema (Gwoździewicz-GB)

f es irreducible si y solo si se verifican las siguientes condiciones:

(i) *los cocientes H_i / H_{i-1} son enteros para $i \in \{2, \ldots, h\}$,*

(ii) *los cocientes C_i son enteros para $i \in \{1, \ldots, h\}$,*

(iii) $\mathrm{mcd}(C_0, \ldots, C_i) = C_0 / H_i$ *para $i \in \{1, \ldots, h\}$.*

Además en tal caso el sistema minimal de generadores del semigrupo de valores de f es $C_0, \ldots, C_h$.

Criterio de irreducibilidad

Ejemplo

Sea $f(x,y) = (y^2 - x^3)^2 - x^5 y$. *Entonces*

$$D(u,v) = -256v^3 + 256u^6v^2 + 288u^{13}v - 256u^{19} - 27u^{20}$$

$$\mathcal{N} = \{\tfrac{6}{1}\} + \{\tfrac{13}{2}\}.$$

$$L_1 = 6,\ L_2 = 13,\ M_1 = 1,\ M_2 = 2$$

$$H_0 = 1,\ H_1 = 2,\ H_2 = 4$$

$$C_0 = H_2 = 4,\ C_1 = 6\,;C_2 = 13$$

Por tanto f *es irreducible con semigrupo* $S(f) = \mathbf{N}4 + \mathbf{N}6 + \mathbf{N}13$.