Superficies mínimas en el espacio euclídeo

Joaquín Pérez email: jperez@ugr.es http: //wdb.ugr.es/∼jperez/

UNIVERSIDAD DE GRANADA

IEMATH-GR Instituto de Matemáticas

Parcialmente financiado por la Agencia Estatal de investigación y la Fundación Europea para el Desarrollo Regional
Proyectos MTM2014-52368-P and MTM2017-89677-P (AEI/FEDER, UE)

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE ECONOMÍA, INDUSTRIA Y COMPETITIVIDAD
AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN

Unión Europea
Fondo Europeo de Desarrollo Regional
"Una manera de hacer Europa"
Proyectos cofinanciados con FEDER (Fondo Europeo de Desarrollo Regional)

IV Jornadas Doctorales del Programa de Doctorado en Matemáticas
Cádiz, 20 de Noviembre de 2018

Resumen

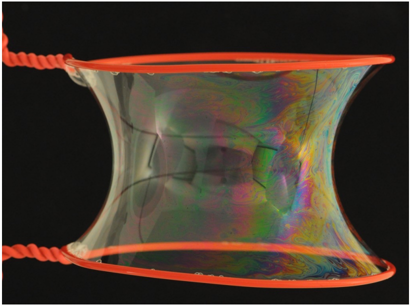
- Concepto de superficie mínima: Teorías relacionadas.
- Aplicaciones.
- Cronología de la teoría de superficies mínimas.
- Estado del arte.
- Algunos problemas abiertos.

¿Qué es una superficie mínima?

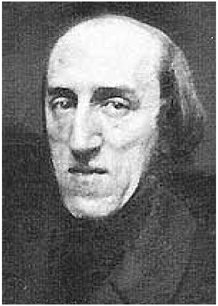
$X\colon M^2 \to \mathbb{R}^3$ inmersión con aplicación de Gauss N. X es mínima si (equivalentes)

1. $2H = -\text{Traza}(dN) = k_1 + k_2 = 0$ en M Geometría Diferencial
   (H: curvatura media, k_i: curvaturas principales).
2. Funciones coordenadas de X son armónicas ($\Delta X = 2HN$) EDPs
3. Punto crítico del funcional área para variaciones normales con soporte compacto: $A'(0) = -2\int_M uH = 0$, $\forall u \in C_0^\infty(M)$, $A(t) = \text{Area}[X + tuN]$.
   Versión 2D de las geodésicas. Cálculo de Variaciones
4. Localmente, es el grafo de una solución de
   $(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$ (Euler-Lagrange) EDPs
5. $\forall p \in M$, $\exists U_p \subset M$ entorno de p : $\text{Area}[X(U_p)] \leq \text{Area}(\Sigma)$ $\forall \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ con $\partial\Sigma = \partial X(U_p)$ ($A''(0) \geq 0$ $\forall u \in C_0^\infty(U_p)$) Problema de Plateau
6. Punto crítico del funcional energía $E = \int_M |\nabla X|^2$ para variaciones normales con soporte compacto ($E \geq 2A$, "=" $\Leftrightarrow$ X conforme) Cálculo de Variaciones
7. $\Pi \circ N\colon M \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es una función meromorfa entre superficies de Riemann (Π: proyección estereográfica) Análisis complejo

El problema de Plateau



Joseph Antoine Ferdinand Plateau (1801-1883)



Ley de Laplace-Young: $\boxed{P_1 - P_2 = T_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}$

P_1, P_2: presiones a ambos lados de la superficie
T_s: tensión superficial, R_i: radios de curvatura.

Teorema 1 (Douglas-Radó)

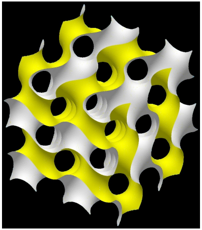
Dada $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *curva de Jordan rectificable,* $\exists X \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^3)$ *tal que* $X(\mathbb{S}^1) = \Gamma$ *y* $Area[X(\overline{D})] \leq Area[Y(\overline{D})]$ $\forall Y \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^3)$ *con* $Y(\mathbb{S}^1) = \Gamma$.

¿Para qué sirven las superficies mínimas?

Física: Horizonte de sucesos en agujeros negros
Relatividad

Arquitectura: Frei Otto

Química: copolímeros, nanotecnología



Naturaleza: formas óptimas

Cronología de la teoría de superficies minimas. Edades de oro

- 1741 Euler: puntos críticos del área entre superficies de revolución. Descubre la catenoide (aliseide)
- 1762-1776 Lagrange: $A'(0) = 0 \Leftrightarrow (1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{xx} = 0$
  Meusnier: $\Leftrightarrow \; H = 0,$ Descubre el helicoide.
- 1855-1890 (Análisis complejo): Beltrami, Bonnet, Catalan, Darboux, Enneper, Lie, Riemann, Scherk, Schoenflies, Schwarz, Serret, Weierstrass, Weingarten...
- Principios del siglo XX (EDPs): Bernstein, Courant.
- 1930-1940 (1^a medalla Fields): Douglas, Morrey, Morse, Radó, Shiffman...
- 1960-75 (GMT) Federer, Fleming, Almgren, Simon... : formulación débil, currents, Análisis funcional
  Osserman: Inicio de la teoría global: superficies de Riemann, Reprentación de Weierstrass, CTF
- 1980-actualidad Nuevas ejemplos completos ¡ tras más de 1 siglo !
  Ordenador, conjeturas de Poincaré, de la masa positiva, Lawson y Willmore
  Codá, Colding, Costa, Hoffman, Karcher, Meeks, Minicozzi, Neves, Ros, Rosenberg, Schoen, Yau...

Estado actual de la teoría global

$\mathcal{M}_C = \{M \subset \mathbb{R}^3$ mínima, embebida, completa[1] $\mid g(M) < \infty\}$
$\mathcal{M}_C(g) = \{M \in \mathcal{M}_C \mid g(M) = g\}$, $g \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathcal{M}_P = \{M \in \mathcal{M}_C \mid$ propia[2]$\}$
$\mathcal{M}_P(g) = \mathcal{M}_P \cap \mathcal{M}_C(g)$

$M \in \mathcal{M}_C \;\Rightarrow\;$ M no compacta $\;\Rightarrow\; \mathcal{E}(M) = \{$finales[3] de $M\} \neq \emptyset$.

$\mathcal{M}_C(g,k) = \{M \in \mathcal{M}_C(g) \mid \#\mathcal{E}(M) = k\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\mathcal{M}_P(g,k) = \mathcal{M}_P \cap \mathcal{M}_C(g,k)$

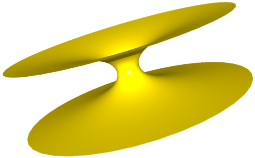
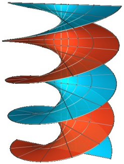
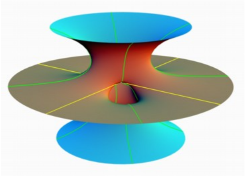
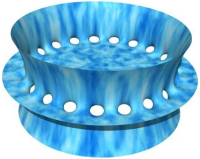
Cuestión 1

¿Cuáles son las topologías realizables? ¿Clasificación según topología?

[1]Ninguna curva con velocidad constante puede escapar en tiempo finito
[2]Separa $\mathbb{R}^3$ en dos componentes conexas
[3]Formas de ir a ∞ sobre M

Estado actual de la teoría global: Topología finita $(\#\mathcal{E}(M) < \infty)$

Ejemplos 'clásicos':

plano catenoide, 1744 helicoide, 1776 Costa, 1982 Hoffman-Meeks (1990)

Teorema 2 (Colding-Minicozzi, Annals 2008)

Si $M \in \mathcal{M}_C$, $\#\mathcal{E}(M) < \infty \;\Rightarrow\; M \in \mathcal{M}_P$.

Cuestión 2 (Problema de Calabi-Yau)

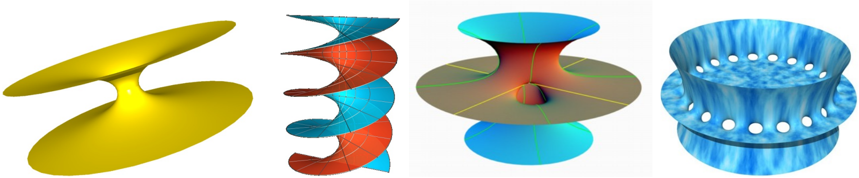
$\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_P$?

Teorema 3 (Meeks-Rosenberg, Annals 2005)

$\mathcal{M}_P(0,1) = \{$*plano, helicoide* $\}$.

Estado actual de la teoría global: Topología finita $(\#\mathcal{E}(M) < \infty)$

Ejemplos ‘clásicos’:



plano catenoide, 1744 helicoide, 1776 Costa, 1982 Hoffman-Meeks (1990)

Teorema 2 (Colding-Minicozzi, Annals 2008)

Si $M \in \mathcal{M}_C, \ \#\mathcal{E}(M) < \infty \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{M}_P.$

Cuestión 2 (Problema de Calabi-Yau)

$\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_P$?

Teorema 3 (Meeks-Rosenberg, Annals 2005)

$\mathcal{M}_P(0,1) = \{$*plano, helicoide*$\}$.

Estado actual de la teoría global: Topología finita, 1 final

Teorema 4 (Bernstein-Breiner CMH 2011, Meeks-P Crelle J 2017)

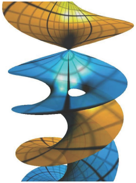
Si $M \in \mathcal{M}_P(g,1)$, $g \geq 1 \Rightarrow M$ *asintótica al helicoide (helicoide con* g *asas)*

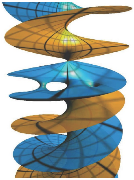
Teorema 5 (Hoffman-Weber-Wolf, Annals 2009)

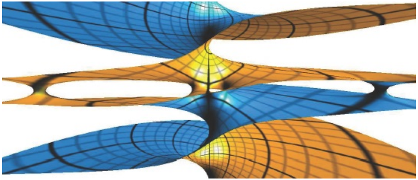
$\mathcal{M}_P(1,1) \neq \emptyset$ *(existe un helicoide con una asa)*

Teorema 6 (Hoffman-Traizet-White, Acta 2016)

$\forall g \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_P(g,1) \neq \emptyset$ *(existen helicoides con* g *asas).*







Cuestión 3

¿Hay un único helicoide con g *asas para cada* g*?*

Estado actual de la teoría global: Topología finita, $2 \leq k < \infty$ finales

Teorema 7 (Collin, Annals 1997)

Si $M \in \mathcal{M}_P(g,k)$, $2 \leq k < \infty \;\Rightarrow\;$ *curvatura total finita* $\quad (\int_M K > -\infty)$
Consecuencia: M asintótica a planos o semi-catenoides

Teorema 8 (Schoen, JDG 1983)

Ai $M \in \mathcal{M}_C(g,2)$ + *curvatura total finita* $\;\Rightarrow\;$ *catenoide.*

Teorema 9 (López-Ros, JDG 1991)

Si $M \in \mathcal{M}_C(0,k)$ + *curvatura total finita* $\;\Rightarrow\;$ *plano ó catenoide.*

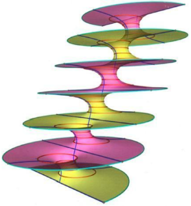
Teorema 10 (Costa, Inventiones 1991)

Ai $M \in \mathcal{M}_C(1,3)$ + *curvatura total finita* $\;\Rightarrow\;$ *M pertenece a la familia 1-paramétrica de Costa-Hoffman-Meeks.*

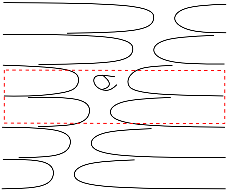
Cuestión 4 (Conjetura de Hoffman-Meeks)

Si $M \in \mathcal{M}_C(g,k)$ *curvatura total finita* $\;\Longrightarrow\;$ $k \leq g+2$.

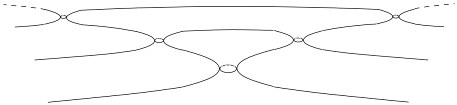
Estado actual de la teoría global: infinitos finales



Riemann (1867)



Hauswirth-Pacard (2007)



Traizet (2012) $g = \infty$

$\mathcal{E}(M) \hookrightarrow [0,1]$ embebimiento. $\mathbf{e} \in \mathcal{E}(M)$ final simple si $\mathbf{e}$ aislado en $\mathcal{E}(M)$.

$\mathbf{e} \in \mathcal{E}(M)$ final límite si no es aislado.

Teorema 11 (Collin-Kusner-Meeks-Rosenberg, JDG 2004)

Si $M \in \mathcal{M}_P(g,\infty) \Rightarrow M$ tiene una cantidad numerable de finales (≤ 2 límite)

Teorema 12 (Hauswirth-Pacard, Inventiones 2007)

Si $1 \leq g \leq 37 \Rightarrow \mathcal{M}_P(g,\infty) \neq \emptyset$ ($g \geq 38$ Morabito IUMJ 2008).

Teorema 13 (Meeks-P-Ros, Inventiones 2004)

Si $M \in \mathcal{M}_P(g,\infty)$, $g < \infty \Rightarrow M$ tiene al menos dos finales límite.

Estado actual de la teoría global: infinitos finales

Teorema 14 (Meeks-P-Ros, Annals 2015)

$\mathcal{M}_P(0,\infty) = \{$*ejemplos mínimos de Riemann*$\} \cong (0,1)$.
Si $M \in \mathcal{M}_P(g,\infty)$, $g < \infty \Rightarrow$ *sus finales simples (intermedios) son asintóticos a planos, y sus dos finales límite son asintóticos a medios ejemplos de Riemann.*

Teorema 15 (Meeks-P-Ros, 2018, Calabi-Yau para género finito)

Si $M \in \mathcal{M}_C(g,\infty)$ *tiene una cantidad numerable de finales límite* $\Rightarrow$ $M \in \mathcal{M}_P$ *y* M *tiene 2 dos finales límite.*

Teorema 16 (Traizet, IUMJ 2012)

$\exists M \subset \mathbb{R}^3$ *CEMS con género infinito, un sólo final límite y todos sus finales simples son asintóticos a semicatenoides.*

Cuestión 5

¿Cómo es la teoría de superficies mínimas completas de género infinito?