

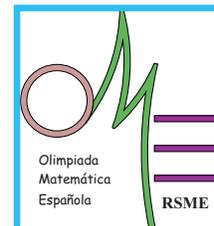


# LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 16 de enero de 2015



1. Demuestra que

$$(ax + by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{R}$  y cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a + b = 1, a, b \geq 0$ .  
¿En qué casos se da la igualdad?

2. Sean  $r$  y  $s$  dos rectas paralelas, y  $A$  un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto  $B$  de la recta  $r$ , sea  $C$  el punto de la recta  $s$  tal que  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ , y sea  $P$  el pie de la perpendicular desde  $A$  sobre la recta  $BC$ . Demuestra que, independientemente de qué punto  $B$  de la recta  $r$  tomemos, el punto  $P$  está sobre una circunferencia fija.
3. Un campeonato de baloncesto se ha jugado por sistema de liga a dos vueltas (cada par de equipos se enfrentan dos veces) y sin empate (si el partido acaba en empate hay prórrogas hasta que gane uno de los dos). El ganador del partido obtiene 2 puntos y el perdedor 1 punto. Al final del campeonato, la suma de de los puntos obtenidos por todos los equipos salvo el campeón es de 2015 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado el campeón?

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

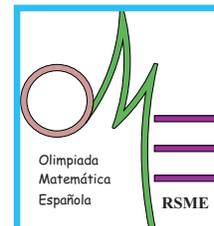


# LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 16 de enero de 2015



4. Los enteros positivos  $x, y, z$  cumplen

$$x + 2y = z, \quad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

Halla todos los posibles valores del producto  $xyz$ .

5. En una recta tenemos cuatro puntos  $A, B, C$  y  $D$ , en ese orden, de forma que  $AB = CD$ . El punto  $E$  es un punto fuera de la recta tal que  $CE = DE$ . Demuestra que

$$\widehat{CED} = 2\widehat{AEB}$$

si y sólo si  $AC = EC$ .

6. Halla todas las ternas de reales positivos  $(x, y, z)$  que cumplan el sistema

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1 \\ 2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1 \\ 2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1 \end{cases}$$

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**