

## Soluciones fase local OME curso 2018/19

Alejandro Miralles Montolío

### PRIMER DÍA

1. Para cada número de cuatro cifras  $abcd$ , denotamos por  $S$  al número  $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$ . Demuestra que  $S$  es múltiplo de 37 si y sólo si las dos cifras centrales del número  $abcd$  son iguales.

**Solución.** Escribimos el número como  $\overline{abcd}$  como  $1000a + 100b + 10c + d$  y el número  $\overline{dcba}$  como  $1000d + 100c + 10b + a$ . Por tanto,

$$S = \overline{abcd} - \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = 999(a - d) + 90(b - c) = 37 \cdot 3^3(a - d) + 2 \cdot 5 \cdot 3^2(b - c).$$

El primer sumando es obviamente múltiplo de 37. El segundo sumando no tiene el factor 37 ya que éste es un número primo y  $|b - c| \leq 9$ . Por tanto,  $S$  será múltiplo de 37 si y sólo si  $b - c = 0$ , es decir, si y sólo si  $b = c$ .

2. Demuestra que para todo  $n \geq 2$  podemos encontrar  $n$  números reales  $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 1$  de manera que los productos

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad \text{y} \quad \frac{1}{1 - x_1} \cdot \frac{1}{1 - x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - x_n}$$

son iguales.

**Solución.** Dado  $x \neq 1$ , notemos que la ecuación

$$x = \frac{1}{1 - x} \iff x^2 - x + 1 = 0$$

no tiene soluciones reales. Sin embargo, dados  $x, y \neq 1$ ,

$$x \cdot y = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - y}$$

tiene una solución sencilla ya que

$$x \cdot y = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{y-1}$$

y las ecuaciones

$$x = \frac{1}{x-1} \text{ e } y = \frac{1}{y-1} \iff x^2 - x - 1 = 0 \text{ e } y^2 - y - 1 = 0$$

sí tienen solución

$$x = y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, si  $n$  es un número par, podemos agrupar de dos en dos cada término de cada producto y utilizar lo anterior, encontrando las soluciones

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

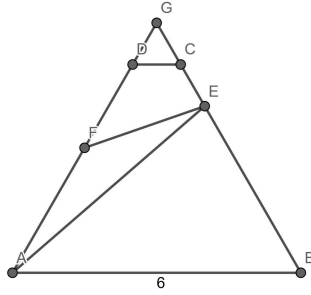
Si  $n = 3$ , consideramos, por ejemplo,  $x_1 = x_2 = 2$ . La igualdad del enunciado nos lleva a la ecuación

$$4x_3 = \left(\frac{1}{1-2}\right)^2 \frac{1}{1-x_3} = \frac{1}{1-x_3} \iff 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$$

que da la solución  $x_3 = \frac{1}{2}$ . Así, obtenemos  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, \frac{1}{2})$ . Si  $n$  es cualquier impar mayor que 3, basta con completar estos tres valores con un número par de valores de los  $x_k$  utilizando el caso par anterior.

3. El trapecio isósceles  $ABCD$  tiene lados paralelos  $AB$  y  $CD$ . Sabemos que  $AB = 6$ ,  $AD = 5$  y  $\angle DAB = 60^\circ$ . Se lanza un rayo de luz desde  $A$  que rebota en  $CB$  en el punto  $E$  e interseca en  $AD$  en el punto  $F$ . Si  $AF = 3$ , calcula el área del triángulo  $AFE$ .

**Solución.** Puesto que el trapecio es isósceles y  $\angle DAB = 60^\circ$ , podemos alargar los lados  $AD$  y  $BC$  que intersectan en  $G$ , formando así un triángulo equilátero  $ABG$ .



Llamando  $\alpha = \angle EAB$ , tendremos que  $\angle AEB = 120 - \alpha$ . Como el rayo sale simétricamente del lado  $BC$ , tendremos que  $\angle GEF = 120 - \alpha$  y, por tanto,

$$\angle FEA = 180 - 2(120 - \alpha) = 2\alpha - 60.$$

Como  $\angle FAE = 60 - \alpha$ , tendremos que  $\angle AFE = 180 - \alpha$  y entonces  $\angle GFE = \alpha$ . Esto demuestra que los triángulos  $GFE$  y  $BAE$  son semejantes. Llamando  $x = \overline{GE}$ , tendremos que  $\overline{EB} = 6 - x$ . Como  $\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 6 - 3 = 3$ , tendremos por la semejanza de triángulos que

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{6 - x} \iff 18 - 3x = 6x \iff 9x = 18$$

de donde obtenemos que  $x = 2$  y, por tanto,  $\overline{GE} = 2$  y  $\overline{EB} = 4$ . Tendremos

$$\overline{AB}/\overline{GF} = 6/3 = 2 \implies \text{Área}(BAE)/\text{Área}(GFE) = 2^2 = 4.$$

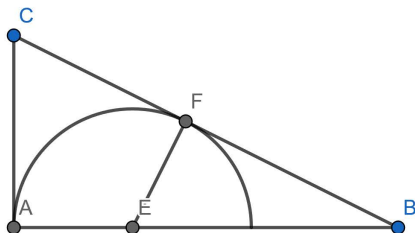
El área del triángulo  $AFE$  se puede calcular, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{Área}(AFE) &= \text{Área}(AGB) - \text{Área}(GFE) - \text{Área}(AEB) = \\ \text{Área}(AGB) - 5\text{Área}(GFE) &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen } 60 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{sen } 60 = \\ &= (18 - 15) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

## SEGUNDO DÍA

4. Sea  $p \geq 3$  un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor  $p^2 - 1$  y cateto menor  $2p$ . Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de  $p$  para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

**Solución.** En el triángulo rectángulo  $ABC$ , consideramos  $\overline{AB} = p^2 - 1$ ,  $\overline{AC} = 2p$ .



Por el Teorema de Pitágoras, tendremos que  $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ , así que

$$\overline{BC}^2 = (2p)^2 + (p^2 - 1)^2 = 4p^2 + p^4 - 2p^2 + 1 = p^4 + 2p^2 + 1 = (p^2 + 1)^2$$

de donde obtenemos que  $\overline{BC} = p^2 + 1$ .

Llamando  $r$  al radio del semicírculo,  $E$  el centro del círculo que está en el lado  $AB$  y  $F$  el punto de tangencia del semicírculo con el lado  $BC$ , tendremos que  $\overline{AE} = \overline{EF} = r$ . Por una parte, el área del triángulo  $ABC$  viene dada por

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (p^2 - 1)p.$$

Por otra,

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(AEC) + \text{Área}(ECB) = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{EF} =$$

$$\frac{1}{2}r \cdot 2p + \frac{1}{2}(p^2 + 1) \cdot r = \frac{r}{2}(p^2 + 2p + 1) = \frac{r}{2}(p + 1)^2.$$

Igualando las dos expresiones para el área del triángulo  $ABC$ , obtenemos que

$$\frac{r}{2}(p + 1)^2 = (p^2 - 1)p$$

de donde

$$r = \frac{(p^2 - 1)2p}{(p + 1)^2} = \frac{2p(p - 1)}{p + 1}.$$

Es un cálculo sencillo comprobar que

$$2p - 4 < \frac{2p(p - 1)}{p + 1} < 2p$$

así que las únicas posibilidades para  $r$  son  $2p - 1$ ,  $2p - 2$  y  $2p - 3$ .

- Si  $r = 2p - 1$ , entonces

$$2p - 1 = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \implies 2p^2 + 2p - p - 1 = 2p^2 - 2p \implies p = 1/3$$

- Si  $r = 2p - 2 = 2(p - 1)$ , entonces

$$2(p - 1) = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \implies 1 = \frac{2p}{p + 1} \implies p = 1$$

- Si  $r = 2p - 3$ , entonces

$$2p - 3 = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \implies 2p^2 + 2p - 3p - 3 = 2p^2 - 2p \implies p = 3$$

Por tanto, la única solución válida es  $p = 3$ , lo que nos da el valor de  $r = 3$ .

5. ¿Existen  $m, n$  números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

**Solución.** Tratamos de factorizar la expresión del enunciado. Igualando esta expresión a 0, tendremos

$$n^2 + (2018m + 1)n + 2019m - 2019m^2 = 0$$

que podemos tratar como una ecuación en la variable  $n$ , obteniendo que

$$n = \frac{-(2018m + 1) \pm \sqrt{(2018m + 1)^2 - 4(2019m - 2019m^2)}}{2}.$$

La expresión dentro de la raíz viene dada por

$$\begin{aligned} & (2018m + 1)^2 - 4(2019m - 2019m^2) = \\ & 2018^2m^2 + 2 \cdot 2018m + 1 - 4 \cdot 2019m + 4 \cdot 2019m^2 = \\ & (2018^2 + 4 \cdot 2018 + 4)m^2 - 2m + 1 = 2020^2m^2 - 2m + 1 = (2020m - 1)^2 \end{aligned}$$

así que

$$n = \frac{-(2018m + 1) \pm (2020m - 1)}{2}$$

y, entonces, las soluciones son

$$n_1 = \frac{2m - 2}{2} = m - 1$$

y

$$n_2 = \frac{-4038m}{2} = -2019m.$$

Por tanto, podemos factorizar la expresión del enunciado como

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 = (n + 2019m)(n - m + 1).$$

En este producto, el primer factor es obviamente mayor que 1. Una condición necesaria para que esta expresión sea un número primo es que  $n - m + 1 = 1$ , es decir,  $n = m$ . En este caso, el primer factor queda de la forma  $n + 2019m = 2020n$ , que es un número compuesto ya que 2020 lo es. Por tanto, la expresión del enunciado no será un número primo para ningún valor de  $n$  y de  $m$  naturales.

6. Fijamos un número natural  $k \geq 1$ . Encuentra todos los polinomios  $P(x)$  que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de  $x \in \mathbb{R}$ .

**Solución.** Fijémonos que una solución trivial es  $P(x) = 0$  para cualquier valor de  $k \geq 1$ .

Para encontrar otras soluciones, fijamos primero  $k = 1$ . En ese caso, la ecuación queda

$$P(x) - P(x) = xP(x),$$

por lo que  $P(x) = 0$ , que es la solución anterior.

Si  $k \geq 2$  y  $P(x)$  es una constante  $c$ , tendremos que  $c - c = x^k c$  y, por tanto,  $cx^k = 0$ , imposible a menos que  $c = 0$ , que nos da el polinomio trivial  $P(x) = 0$  de nuevo.

Supongamos pues que  $k \geq 2$  y que el grado del polinomio es  $n \geq 1$ . Es obvio que  $P(x^k)$  tendrá grado  $nk$  y  $P(kx)$  tendrá grado  $n$ , así que el término de la izquierda de la igualdad será un polinomio de grado  $nk$  ya que  $k \geq 1$ . El término de la derecha será un polinomio de grado  $n + k$ , así que tendremos que  $nk = n + k$ , de donde  $k(n - 1) = n$  y, por tanto,

$$k = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Como  $k$  es un número natural, tendremos que necesariamente  $n = 2$  y, por tanto,  $k = 2$ . Escribimos pues  $P(x) = ax^2 + bx + c$  y, sustituyendo en la ecuación, obtenemos:

$$ax^4 + bx^2 + c - (4ax^2 + 2bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

y simplificando obtenemos  $(b - 4a)x^2 = bx^3 + cx^2$ , de donde necesariamente obtenemos que  $b = 0$  y  $c = -4a$ . Así pues, los polinomios cumpliendo la propiedad del enunciado serán todos los de la forma  $P(x) = a(x^2 - 4)$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

En resumen, para todo  $k \geq 1$ , una solución es  $P(x) = 0$ . En el caso  $k = 2$ , los polinomios de la forma  $P(x) = a(x^2 - 4)$  para cualquier  $a \in \mathbb{R}$  también son solución.

### TERCER DÍA

7. Considera el conjunto de números enteros positivos  $n$  cumpliendo que  $1 \leq n \leq 1000000$ . En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma  $a^3 + mb^2$ , con  $a, b \in \mathbb{N}$  y  $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$  (la cantidad) de números que no pueden expresarse de esa manera.

**Solución.** Como  $0 \leq a^3, b^2 \leq a^3 + mb^2 \leq 1000000$ , tendremos que  $0 \leq a \leq 100$  y  $0 \leq b \leq 1000$ . Para  $m = 0$ , tenemos que  $a^3 + mb^2 = a^3$  y la cantidad de números de esa forma será 100. Para cada  $m = 2, 4, 6, 8$ , la cantidad de números será menor o igual que  $100 \cdot 1000 = 100000$ . Por tanto, habrá, a lo sumo,  $100 + 4 \cdot 100000 = 400100$  números de la forma  $a^3 + mb^2$  con las condiciones del enunciado. Por tanto, habrá más números que no pueden expresarse de esa manera.

8. Prueba que para todo  $a, b, c > 0$  se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}.$$

¿En qué caso se cumple la igualdad?

**Solución.** Multiplicando por  $ab^3c$  toda la desigualdad para eliminar los denominadores, tendremos que

$$\begin{aligned} a^3 - a^2bc &\geq ac^2b^2 - c^3b^3 \iff a^3 - ac^2b^2 \geq a^2bc - c^3b^3 \iff \\ a^2(a - bc) &\geq c^2b^2(a - bc) \iff (a^2 - b^2c^2)(a - bc) \geq 0. \end{aligned}$$

Como la función  $f(x) = x^2$  es creciente, tendremos que los dos términos del producto de la izquierda deben tener el mismo signo, así que la



desigualdad es cierta. La igualdad se dará si y sólo si  $a - bc = 0$ , es decir, si  $a = bc$ .

9. Consideramos un triángulo  $ABC$  y un punto  $D$  en el lado  $AC$ . Si  $\overline{AB} = \overline{DC} = 1$ ,  $\angle DBC = 30^\circ$  y  $\angle ABD = 90^\circ$ , calcula el valor de  $\overline{AD}$ .

**Solución.** Llamando  $\angle ADB = \alpha$ , tendremos que  $\angle BDC = 180 - \alpha$ . Utilizando el teorema de los senos en el triángulo  $ADB$  tenemos que

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{BD}{\sin(90 - \alpha)}$$

y en el triángulo  $DBC$  tendremos que

$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{BD}{\sin(\alpha - 30)} = \frac{BC}{\sin(180 - \alpha)}$$

De las primeras igualdades deducimos que  $BD = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  y de la segunda que

$$BD = \frac{\sin(\alpha - 30)}{\sin 30} = 2 \sin(\alpha - 30) = 2(\sin \alpha \cos 30 - \cos \alpha \sin 30)$$

y así,  $BD = \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha$ . Igualando tenemos

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{3} \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$$

de donde  $\cos \alpha(1 + \sin \alpha) = \sqrt{3} \sin^2 \alpha$  y, elevando al cuadrado y denotando por  $t = \sin \alpha$ ,  $(1 - t^2)(1 + t)^2 = 3t^4$ , de donde  $4t^4 + 2t^3 - 2t - 1 = 0$  y, factorizando,  $2t^3(2t + 1) - (2t + 1) = 0$ . Por tanto,  $(2t^3 - 1)(2t + 1) = 0$  y, por tanto, tenemos dos opciones: Si  $2t + 1 = 0$ , entonces  $t = -\frac{1}{2}$  y  $x = 1/t = -2$ , imposible. Por tanto,  $2t^3 - 1 = 0$ , así que  $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$  y deducimos que  $x = \sqrt[3]{2}$ .