# LIV Olimpiada Matemática Española

**Primera Fase**

**Primera sesión**

**Viernes mañana, 19 de enero de 2018**

**1.** Sean $a \geq 1$, $b \geq 1$ números naturales cuyo máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por $D$ y $M$, respectivamente.

Demostrar que
$$D^2 + M^2 \geq a^2 + b^2.$$

**2.** ¿De cuántas maneras se puede escribir 111 como suma de tres números enteros en progresión geométrica? *Nota: la razón de la progresión no tiene por qué ser un número entero.*

**3.** Encontrar las funciones reales $f$, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional
$$f(x + f(x+y)) = f(2x) + y$$
cualesquiera sean $x$, $y$ reales.

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

# LIV Olimpiada Matemática Española

**Primera Fase**

**Segunda sesión**

**Viernes tarde, 19 de enero de 2018**

**4.** Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1$$

**5.** Sea $n$ un número natural. Probar que si la última cifra de $7^n$ es 3, la penúltima es 4.

**6.** Sea $AD$ la mediana de un triángulo $ABC$ tal que $\angle ADB = 45^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

# LIV Olimpiada Matemática Española

**Primera Fase**

**Primera sesión**

**Viernes tarde, 19 de enero de 2018**

**1.** Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1$$

**2.** Sea $n$ un número natural. Probar que si la última cifra de $7^n$ es 3, la penúltima es 4.

**3.** Sea $AD$ la mediana de un triángulo $ABC$ tal que $\angle ADB = 45°$ y $\angle ACB = 30°$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

# LIV Olimpiada Matemática Española

**Primera Fase**

**Segunda sesión**

**Sábado mañana, 20 de enero de 2018**

**4.** Probar que:

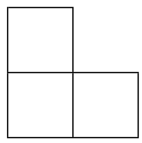
1. La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de $\mathbb{R}^3$ a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.
2. Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.
3. Misma cuestión que las anteriores para la suma de los cubos de las distancias.

**5.** Sean $a$, $b$, $c$ números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

es un múltiplo del producto $abc$.

**6.** Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula $9 \times 9$. ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

**No está permitido el uso de calculadoras.**
**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**
**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**