

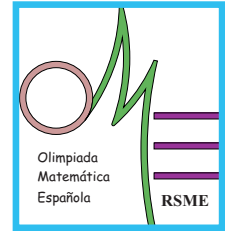


# LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 14 de enero de 2017



1. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b+c-2} = 1$$

2. Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.
3. En un triángulo acutángulo  $ABC$  consideramos su ortocentro,  $H$ . Sean  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  los simétricos de  $H$  con respecto a los lados  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$ , respectivamente. Probar que si los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?

No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

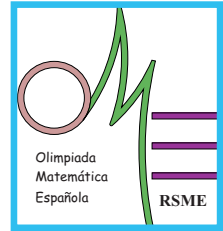


# LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 14 de enero de 2017



4. Probar que dados  $4n$  puntos en el espacio tridimensional, tales que no hay cuatro de ellos coplanarios, siempre se pueden formar  $n$  pirámides de base triangular de modo que no hay intersecciones entre ellas.
5. Hallar los valores enteros positivos de  $m$  para los que existe una función  $f$  del conjunto de los números enteros en sí mismo tal que  $f^{(m)}(n) = n + 2017$ , donde  $f^{(m)}$  consiste en aplicar la función  $f$   $m$  veces.
6. Determinar todos los números naturales  $n$  para los que existe algún número natural  $m$  con las siguientes propiedades
  - i) El número  $m$  tiene al menos dos cifras (en base 10), todas son distintas y ninguna es 0.
  - ii) El número  $m$  es múltiplo de  $n$  y cualquier reordenación de sus cifras da lugar a un múltiplo de  $n$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**