LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 14 de enero de 2017

1. Encontrar todas las soluciones enteras positivas de

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b+c-2}=1$$

2. Probar que hay infinitos números primos cuyo resto al dividirlos entre 3 es 2.

3. En un triángulo acutángulo ABC consideramos su ortocentro, H. Sean A', B' y C' los simétricos de H con respecto a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Probar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen un ángulo igual, entonces también tienen un lado igual. ¿Es cierto el recíproco?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 14 de enero de 2017

4. Probar que dados $4n$ puntos en el espacio tridimensional, tales que no hay cuatro de ellos coplanarios, siempre se pueden formar n pirámides de base triangular de modo que no hay intersecciones entre ellas.

5. Hallar los valores enteros positivos de m para los que existe una función f del conjunto de los números enteros en sí mismo tal que $f^{(m)}(n) = n + 2017$, donde $f^{(m)}$ consiste en aplicar la función f m veces.

6. Determinar todos los números naturales n para los que existe algún número natural m con las siguientes propiedades

i) El número m tiene al menos dos cifras (en base 10), todas son distintas y ninguna es 0.

ii) El número m es múltiplo de n y cualquier reordenación de sus cifras da lugar a un múltiplo de n.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.