OLIMPIADA MATEMÁTICA

ACTIVIDADES 2019

REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Continuamos este año la publicación de este pequeño folleto que recoge los problemas propuestos en las principales actividades relacionadas con la Olimpiada Matemática Española: desde los utilizados en las fases local y nacional de su edición número 55, hasta los de las olimpiadas y concursos internacionales en las que los equipos españoles de matemáticas, allí seleccionados, participaron en el año 2019. Con ello pretendemos poner al alcance tanto de profesores como de estudiantes el valioso material de trabajo que suponen los buenos problemas. Esperamos y deseamos que pueda ser utilizado en diferentes actividades de formación, imprescindibles para poder enfrentarse con éxito a cualquier competición matemática; actividades que difícilmente pueden llegar a buen puerto sin la desinteresada y nunca reconocida labor de los profesores de secundaria.

En las páginas que siguen encontraréis sin duda problemas interesantes, atractivos y formativos. Un buen problema puede abordarse desde distintos enfoques, que os invitamos a explorar. Pero un buen problema es sobre todo un reto. Os animamos a aceptarlo, confiando en que disfrutaréis con ello.

La Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), ha servido de modelo para el resto de competiciones, destinadas a estudiantes de secundaria, que cada año se realizan a lo largo y ancho de los cinco continentes. A diferencia de otras olimpiadas científicas no tiene establecido ningún temario, aunque por tradición los problemas que en ella se proponen, siempre abordables con técnicas elementales, se agrupan alrededor de cuatro grandes bloques: álgebra, geometría, teoría de números y combinatoria. En la web hay excelentes páginas en inglés con abundantes recursos: sirvan como ejemplo las de Art of Problem solving (www.artofproblemsolving.com), y la de Mathlinks (www.mathlinks.ro). Es de destacar asimismo The IMO Compendium (www.imomath.com), que recoge los problemas de las llamadas ”listas cortas”, entre los que cada año se eligen los seis que constituyen finalmente la prueba de la Olimpiada Internacional. No son muchas las páginas en español sobre el tema, aunque en la de la Olimpiada Matemática Argentina (www.oma.org.ar) puede encontrarse también variado material.

Deseamos agradecer de todo corazón el trabajo altruista de cuantos hacen posible, año tras año, la Olimpiada Matemática Española. Estamos especialmente agradecidos a los estudiantes, que cada año participan en ella con ilusión, y a sus profesores, que los alientan y ayudan. La RSME, a través de su Comisión de Olimpiadas, espera ser capaz de ofrecerles el apoyo y soporte matemático que necesiten.

María Gaspar Alonso-Vega

Introducción

Como cada año desde 1964, la Real Sociedad Matemática Española organizó el Concurso Final de la 55 Olimpiada Matemática Española (OME). Lo hizo a través de los Delegados de Distrito o Comunidad, y bajo la coordinación de la Comisión de Olimpiadas de la RSME con la colaboración del Ministerio de Educación y Ciencia. La OME se desarrolla en dos fases: la primera o Fase Local, se celebró a primeros de año y en ella se escogieron los estudiantes que representaron a cada distrito en la Segunda Fase. Este año el Concurso Final, que es de ámbito nacional, se celebró a finales de marzo en Orense y en ella se seleccionaron los miembros del equipo español que han representado a nuestro país en la Olimpiada Internacional (IMO), celebrada en Bath (UK) en julio pasado, y la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas celebrada en Guanajuato (México) en septiembre.

Como hacen otros países de nuestro entorno es fundamental que nuestros estudiantes se preparen lo mejor posible, dentro de nuestras posibilidades, para competir en estos concursos.

Cada año, el equipo español que acude a la IMO es invitado a participar en Olimpiadas internacionales de ámbito regional previas a la IMO. Como parte de la preparación del equipo español, este año los estudiantes seleccionados en el Concurso Final compartieron unas sesiones de trabajo con ex-olímpicos previas al inicio de la preparación que realizaron los estudiantes del equipo español en Barcelona antes de partir para la IMO. En este folleto se recogen los enunciados y soluciones de la Fase Local, los enunciados y soluciones del Concurso Final de la OME 55, Mathcontest y los de las Olimpiadas Mediterránea y el Concurso celebrado durante la preparación de Barcelona. También se han incluido los enunciados de la IMO y las soluciones de nuestros participantes. Finalmente, se han incluido los enunciados y soluciones de la Olimpiada Iberoamericana.

José Luis Díaz Barrero

Índice

LV Olimpiada Matemática Española (Primera Fase)

Enunciados

1. Para cada número de cuatro cifras distintas $\overline{abcd}$, denotamos por S al número $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$. Demuestra que S es múltiplo de 37 si y sólo si las dos cifras centrales del número $\overline{abcd}$ son iguales.

2. Demuestra que para todo $n \geq 2$ podemos encontrar n números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ distintos de 1 de manera que los productos

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x_n}$$

son iguales.

3. El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD. Sabemos que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ y $\angle DAB = 60^o$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e intersecta en AD en el punto F. Si $\overline{AF} = 3$, calcula el área del triángulo AFE.

4. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa del triángulo. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

5. ¿Existen m, n números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

6. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

7. Considera el conjunto de números naturales n cumpliendo que $1 \leq n \leq 1000000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma $a^3 + mb^2$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

8. Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3 c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}.$$

¿En qué caso se cumple la igualdad?

9. Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC. Si $\overline{AB} = \overline{DC} = 1$, $\angle DBC = 30^o$ y $\angle ABD = 90^o$, calcula el valor de $\overline{AD}$.

Soluciones

1. *Para cada número de cuatro cifras distintas $\overline{abcd}$, denotamos por S al número $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$. Demuestra que S es múltiplo de 37 si y sólo si las dos cifras centrales del número $\overline{abcd}$ son iguales.*

Solución. Escribimos el número como $\overline{abcd}$ como $1000a + 100b + 10c + d$ y el número $\overline{dcba}$ como $1000d + 100c + 10b + a$. Por tanto,

$$S = \overline{abcd} - \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = \\ 999(a - d) + 90(b - c) = 37 \cdot 3^3(a - d) + 2 \cdot 5 \cdot 3^2(b - c).$$

El primer sumando es obviamente múltiplo de 37. El segundo sumando no tiene el factor 37 ya que éste es un número primo y $|b - c| \leq 9$. Por tanto, S será múltiplo de 37 si y sólo si $b - c = 0$, es decir, si y sólo si $b = c$.

2. *Demuestra que para todo $n \geq 2$ podemos encontrar n números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n \neq 1$ de manera que los productos*

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \qquad y \qquad \frac{1}{1 - x_1} \cdot \frac{1}{1 - x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1 - x_n}$$

son iguales.

Solución. Dado $x \neq 1$, notemos que la ecuación

$$x = \frac{1}{1 - x} \iff x^2 - x + 1 = 0$$

no tiene soluciones reales. Sin embargo, dados $x, y \neq 1$,

$$x \cdot y = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - y}$$

tiene una solución sencilla ya que

$$x \cdot y = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{1}{1 - y} = \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{1}{y - 1}$$

y las ecuaciones

$$x = \frac{1}{x - 1} \;\text{ e }\; y = \frac{1}{y - 1} \iff x^2 - x - 1 = 0 \;\text{ e }\; y^2 - y - 1 = 0$$

sí tienen solución

$$x = y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, si n es un número par, podemos agrupar de dos en dos cada término de cada producto y utilizar lo anterior, encontrando las soluciones

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

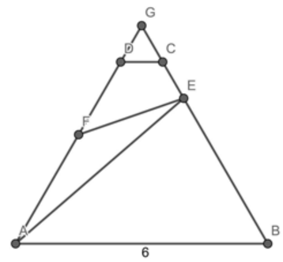
Si $n = 3$, consideramos, por ejemplo, $x_1 = x_2 = 2$. La igualdad del enunciado nos lleva a la ecuación

$$4x_3 = \left(\frac{1}{1-2}\right)^2 \frac{1}{1-x_3} = \frac{1}{1-x_3} \Longleftrightarrow 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$$

que da la solución $x_3 = \frac{1}{2}$. Así, obtenemos $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, \frac{1}{2})$. Si n es cualquier impar mayor que 3, basta con completar estos tres valores con un número par de valores de los x_k utilizando el caso par anterior.

3. El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD. Sabemos que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ y $\angle DAB = 60^o$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e intersecta en AD en el punto F. Si $\overline{AF} = 3$, calcula el área del triángulo AFE.

Solución. Puesto que el trapecio es isósceles y $\angle DAB = 60^o$, podemos alargar los lados AD y BC que intersectan en G, formando así un triángulo equilátero ABG.



Llamando $\alpha = \angle EAB$, tendremos que $\angle AEB = 120 - \alpha$. Como el rayo sale simétricamente del lado BC, tendremos que $\angle GEF = 120 - \alpha$ y, por tanto,

$$\angle FEA = 180 - 2(120 - \alpha) = 2\alpha - 60.$$

Como $\angle FAE = 60 - \alpha$, tendremos que $\angle AFE = 180 - \alpha$ y entonces $\angle GFE = \alpha$. Esto demuestra que los triángulos GFE y BAE son semejantes. Llamando $x = \overline{GE}$, tendremos que $\overline{EB} = 6 - x$. Como $\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 6 - 3 = 3$, tendremos por la semejanza de triángulos que

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{6-x} \Longleftrightarrow 18 - 3x = 6x \Longleftrightarrow 9x = 18$$

de donde obtenemos que $x = 2$ y, por tanto, $\overline{GE} = 2$ y $\overline{EB} = 4$. Tendremos

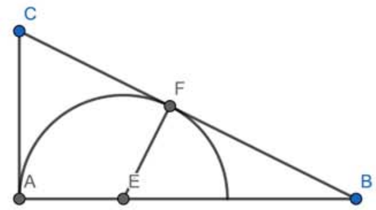
$$AB/GF = 6/3 = 2 \Longrightarrow \text{Área}(BAE)/\text{Área}(GFE) = 2^2 = 4.$$

El área del triángulo AFE se puede calcular, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \text{Área}(AFE) = \text{Área}(AGB) - \text{Área}(GFE) - \text{Área}(AEB) = \\ \text{Área}(AGB) - 5\text{Área}(GFE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \operatorname{sen} 60 = \\ (18 - 15)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

4. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa del triángulo. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.

Solución. En el triángulo rectángulo ABC, consideramos $\overline{AB} = p^2 - 1$, $\overline{AC} = 2p$.



Por el Teorema de Pitágoras, tendremos que $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, así que

$$\overline{BC}^2 = (2p)^2 + (p^2-1)^2 = 4p^2 + p^4 - 2p^2 + 1 = p^4 + 2p^2 + 1 = (p^2+1)^2$$

de donde obtenemos que $\overline{BC} = p^2 + 1$.
Llamando r al radio del semicírculo, E el centro del círculo que está en el lado AB y F el punto de tangencia del semicírculo con el lado BC, tendremos que $\overline{AE} = \overline{EF} = r$.
Por una parte, el área del triángulo ABC viene dada por

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (p^2-1)p.$$

Por otra,

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(AEC) + \text{Área}(ECB) = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{EF} =$$

$$\frac{1}{2}r \cdot 2p + \frac{1}{2}(p^2+1) \cdot r = \frac{r}{2}(p^2+2p+1) = \frac{r}{2}(p+1)^2.$$

Igualando las dos expresiones para el área del triángulo ABC, obtenemos que

$$\frac{r}{2}(p+1)^2 = (p^2-1)p$$

de donde

$$r = \frac{(p^2-1)2p}{(p+1)^2} = \frac{2p(p-1)}{p+1}.$$

Es un cálculo sencillo comprobar que

$$2p - 4 < \frac{2p(p-1)}{p+1} < 2p$$

así que las únicas posibilidades para r son $2p-1$, $2p-2$ y $2p-3$.

- Si $r = 2p - 1$, entonces

$$2p - 1 = \frac{2p(p-1)}{p+1} \Longrightarrow 2p^2 + 2p - p - 1 = 2p^2 - 2p \Longrightarrow p = 1/3$$

- Si $r = 2p - 2 = 2(p-1)$, entonces

$$2(p-1) = \frac{2p(p-1)}{p+1} \Longrightarrow 1 = \frac{2p}{p+1} \Longrightarrow p = 1$$

- Si $r = 2p - 3$, entonces

$$2p - 3 = \frac{2p(p-1)}{p+1} \Longrightarrow 2p^2 + 2p - 3p - 3 = 2p^2 - 2p \Longrightarrow p = 3$$

Por tanto, la única solución válida es $p = 3$, lo que nos da el valor de $r = 3$.

5. ¿Existen m, n números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

Solución. Tratamos de factorizar la expresión del enunciado. Igualando esta expresión a 0, tendremos

$$n^2 + (2018m + 1)n + 2019m - 2019m^2 = 0$$

que podemos tratar como una ecuación en la variable n, obteniendo que

$$n = \frac{-(2018m+1) \pm \sqrt{(2018m+1)^2 - 4(2019m - 2019m^2)}}{2}.$$

La expresión dentro de la raíz viene dada por

$$\begin{aligned} (2018m+1)^2 - 4(2019m - 2019m^2) = \\ 2018^2m^2 + 2 \cdot 2018m + 1 - 4 \cdot 2019m + 4 \cdot 2019m^2 = \\ (2018^2 + 4 \cdot 2018 + 4)m^2 - 2m + 1 = 2020^2m^2 - 2m + 1 = (2020m - 1)^2 \end{aligned}$$

así que

$$n = \frac{-(2018m+1) \pm (2020m - 1)}{2}$$

y, entonces, las soluciones son

$$n_1 = \frac{2m-2}{2} = m - 1$$

y

$$n_2 = \frac{-4038m}{2} = -2019m.$$

Por tanto, podemos factorizar la expresión del enunciado como

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 = (n + 2019m)(n - m + 1).$$

En este producto, el primer factor es obviamente mayor que 1. Una condición necesaria para que esta expresión sea un número primo es que $n - m + 1 = 1$, es decir, $n = m$. En este caso, el primer factor queda de la forma $n + 2019m = 2020n$, que es un número compuesto ya que 2020 lo es. Por tanto, la expresión del enunciado no será un número primo para ningún valor de n y de m naturales.

6. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^kP(x)$$

para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Fijémonos que una solución trivial es $P(x) = 0$ para cualquier valor de $k \geq 1$.
Para encontrar otras soluciones, fijamos primero $k = 1$. En ese caso, la ecuación queda

$$P(x) - P(x) = xP(x),$$

por lo que $P(x) = 0$, que es la solución anterior.
Si $k \geq 2$ y $P(x)$ es una constante c, tendremos que $c - c = x^k c$ y, por tanto, $cx^k = 0$, imposible a menos que $c = 0$, que nos da el polinomio trivial $P(x) = 0$ de nuevo.
Supongamos pues que $k \geq 2$ y que el grado del polinomio es $n \geq 1$. Es obvio que $P(x^k)$ tendrá grado nk y $P(2x)$ tendrá grado n, así que el término de la izquierda de la igualdad será un polinomio de grado nk ya que $k \geq 1$. El término de la derecha será un polinomio de grado $n+k$, así que tendremos que $nk = n+k$, de donde $k(n-1) = n$ y, por tanto,

$$k = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Como k es un número natural, tendremos que necesariamente $n = 2$ y, por tanto, $k = 2$.
Escribimos pues $P(x) = ax^2 + bx + c$ y, sustituyendo en la ecuación, obtenemos:

$$ax^4 + bx^2 + c - (4ax^2 + 2bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

y simplificando obtenemos $(b - 4a)x^2 = bx^3 + cx^2$, de donde necesariamente obtenemos que $b = 0$ y $c = -4a$. Así pues, los polinomios cumpliendo la propiedad del enunciado serán todos los de la forma $P(x) = a(x^2 - 4)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
En resumen, para todo $k \geq 1$, una solución es $P(x) = 0$. En el caso $k = 2$, los polinomios de la forma $P(x) = a(x^2 - 4)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ también son solución.

7. Considera el conjunto de números naturales n cumpliendo que $1 \leq n \leq 1000000$. En ese conjunto, indica si es mayor la cantidad de números que pueden expresarse de la forma $a^3 + mb^2$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $m \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ o la cantidad de números que no pueden expresarse de esa manera.

Solución. Como $0 \leq a^3, b^2 \leq a^3 + mb^2 \leq 1000000$, tendremos que $0 \leq a \leq 100$ y $0 \leq b \leq 1000$. Para $m = 0$, tenemos que $a^3 + mb^2 = a^3$ y la cantidad de números de esa forma será 100. Para cada $m = 2, 4, 6, 8$, la cantidad de números será menor o igual que $100 \cdot 1000 = 100000$. Por tanto, habrá, a lo sumo, $100 + 4 \cdot 100000 = 400100$ números de la forma $a^3 + mb^2$ con las condiciones del enunciado. Por tanto, habrá más números que no pueden expresarse de esa manera.

8. Prueba que para todo $a, b, c > 0$ se cumple que

$$\frac{a^2}{b^3c} - \frac{a}{b^2} \geq \frac{c}{b} - \frac{c^2}{a}.$$

¿En qué caso se cumple la igualdad?

Solución. Multiplicando por ab^3c toda la desigualdad para eliminar los denominadores, tendremos que

$$a^3 - a^2bc \geq ac^2b^2 - c^3b^3 \iff a^3 - ac^2b^2 \geq a^2bc - c^3b^3 \iff$$

$$a^2(a - bc) \geq c^2b^2(a - bc) \iff (a^2 - b^2c^2)(a - bc) \geq 0.$$

Como la función $f(x) = x^2$ es creciente, tendremos que los dos términos del producto de la izquierda deben tener el mismo signo, así que la desigualdad es cierta. La igualdad se dará si y sólo si $a - bc = 0$, es decir, si $a = bc$.

9. Consideramos un triángulo ABC y un punto D en el lado AC. Si $\overline{AB} = \overline{DC} = 1$, $\angle DBC = 30^o$ y $\angle ABD = 90^o$, calcula el valor de $\overline{AD}$.

Solución. Llamando $\angle ADB = \alpha$, tendremos que $\angle BDC = 180 - \alpha$. Utilizando el teorema de los senos en el triángulo ADB tenemos que

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\sin(90-\alpha)}$$

y en el triángulo DBC tendremos que

$$\frac{1}{\sin 30} = \frac{BD}{\sin(\alpha - 30)} = \frac{BC}{\sin(180-\alpha)}$$

De las primeras igualdades deducimos que $BD = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ y de la segunda que

$$BD = \frac{\sin(\alpha-30)}{\sin 30} = 2\sin(\alpha - 30) = 2(\sin\alpha\cos 30 - \cos\alpha\sin 30)$$

y así, $BD = \sqrt{3}\sin\alpha - cos\alpha$. Igualando tenemos

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}\sin\alpha - cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \sqrt{3}\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$$

de donde $\cos\alpha(1+\sin\alpha) = \sqrt{3}\sin^2\alpha$ y, elevando al cuadrado y denotando por $t = \sin\alpha$, $(1-t^2)(1+t)^2 = 3t^4$, de donde $4t^4+2t^3-2t-1 = 0$ y, factorizando, $2t^3(2t+1)-(2t+1) = 0$. Por tanto, $(2t^3 - 1)(2t + 1) = 0$ y, por tanto, tenemos dos opciones: Si $2t + 1 = 0$, entonces $t = -\frac{1}{2}$ y $x = 1/t = -2$, imposible. Por tanto, $2t^3 - 1 = 0$, así que $t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y deducimos que $x = \sqrt[3]{2}$.

Enunciados

1. Un conjunto de números enteros T es orensano si existen enteros $a < b < c$ tales que a, c pertenecen a T y b no pertenece a T. Hallar el número de subconjuntos orensanos de $\{1, 2, \ldots, 2019\}$.

2. Determinar si existe un conjunto finito S formado por números primos positivos de manera que para cada entero $n \geq 2$, el número $2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ sea, al menos, múltiplo de uno de los elementos de S.

3. Las ternas de números reales (a, b, c) son tales que el polinomio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + c$ tiene exactamente tres raíces reales distintas, que son iguales a $\tan y$, $\tan 2y$ y $\tan 3y$, para algún número real y. Hallar todos los posibles valores de y, tales que $0 \leq y < \pi$.

4. Calcular todos los pares de enteros (x, y) tales que

$$3^4 2^3 \left(x^2 + y^2\right) = x^3 y^3.$$

5. Calcular el valor mínimo del mayor valor del conjunto A, siendo

$$A = \{xy, xy - x - y + 1, x + y - 2xy, 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

6. En el triángulo escaleno ABC, la bisectriz de A corta al lado BC en el punto D. Las rectas que pasan por D tangentes a las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y ACD cortan a las rectas AC y AB en los puntos E y F, respectivamente. Si BE y CF se cortan en G, demostrar que $\angle EDG = \angle ADF$.

Soluciones

1. Un conjunto de números enteros T es orensano si existen enteros $a < b < c$ tales que a, c pertenecen a T y b no pertenece a T. Hallar el número de subconjuntos orensanos de $\{1, 2, \ldots, 2019\}$.

Solución. El número de subconjuntos de $\{1, 2, \cdots, 2019\}$ es 2^{2019} como es bien conocido. Contemos ahora el número de estos conjuntos que **NO** tienen la propiedad pedida. Claramente, el conjunto vacío, y los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ con un único elemento no tienen la propiedad pedida, ya que es imposible elegir a, c distintos en ellos. Hay en total

$$\binom{2019}{0} + \binom{2019}{1} = 1 + 2019 = 2020$$

de estos conjuntos. Cualquier otro subconjunto que no tenga la propiedad pedida ha de estar formado por elementos consecutivos de $\{1, 2, \ldots, 2019\}$. En efecto, si m, M son respectivamente el mínimo y el máximo de T, para que T NO tenga la propiedad enunciada, todos los elementos $m, m+1, m+2, \ldots, M$ han de estar en T, pues si alguno k no lo estuviera, podemos tomar $a = m$, $b = k$ y $c = M$, cumpliéndose la propiedad. El número de tales subconjuntos es $\binom{2019}{2}$. En efecto, dado un tal subconjunto, su mínimo m y su máximo M lo determinan biunívocamente, y hay $\binom{2019}{2}$ formas distintas de elegir dos números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2019\}$, de forma que el menor será m, y el mayor M.

Finalmente, se tiene que el número total de subconjuntos T de $\{1, 2, \cdots, 2019\}$ con la propiedad pedida es

$$2^{2019} - 2020 - \binom{2019}{2} = 2^{2019} - 2039191.$$

2. Determinar si existe un conjunto finito S formado por números primos positivos de manera que para cada entero $n \geq 2$, el número $2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ sea, al menos, múltiplo de uno de los elementos de S.

Solución. Es bien conocido que

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

con lo que restando 1 a ambos lados, resulta

$$2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6}{6} = \frac{(n-1)\left(2n^2 + 5n + 6\right)}{6}.$$

Esta expresión sugiere tomar $p = (n-1)/6$ o $n = 6p + 1$ con lo que se obtiene

$$2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = p\left(72p^2 + 54p + 13\right).$$

Ahora elegimos $n = 6p + 1$, donde p da resto 1 al dividir entre cualquier primo de S distinto de 139, y da resto -1 al dividir entre 139. Nótese que el resto al dividir entre cualquier primo de S distinto de 139 es $72 + 54 + 13 = 139$, que es primo y por lo tanto no divisible por ningún primo de S distinto de 139, y el resto al dividir entre 139 es $-72 + 54 - 13 = -31$, claramente tampoco divisible por 139. Luego esta expresión es coprima con todos los primos de S, y la respuesta es que **no existe** tal conjunto S.

3. Las ternas de números reales (a, b, c) son tales que el polinomio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + c$ tiene exactamente tres raíces reales distintas, que son iguales a $\tan y$, $\tan 2y$ y $\tan 3y$, para algún número real y. Hallar todos los posibles valores de y, tales que $0 \leq y < \pi$.

Solución. Sean r, r, s, t los tres ceros reales y distintos del polynomio $p(x)$. Mediante las fórmula de Cardano-Viète, identificando los coeficientes cúbico y lineal, se obtiene

$$2r + s + t = r^2 s + r^2 t + 2rst \Leftrightarrow 2r(1 - st) = (r^2 - 1)(s + t)$$

De la última igualdad se deduce que si $r^2 - 1 = 0$ entonces $1 - st = 0$ y viceversa. A continuación, bajo la hipóteis $r^2 = st = 1$ y considerando $0 \leq y < \pi$, analizaremos los siguientes casos:

- Si $r = \tan y$ entonces $y \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ pero para estos valores $s = \tan 2y$ no está definido.
- Si $r = \tan 2y$ entonces $y \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$. Poniendo $s = \tan y$ y $s = \tan 3y$ se tiene que para todos los valores anteriores es $rs = \tan y \cdot \tan 3y = 1$, lo cual es cierto si $y + 3y = 4y$ es un múltiplo impar de $\pi/2$, y esto ocurre para todos los valores anteriores.
- Si $r = \tan 3y$ entonces se debe cumplir $rs = \tan y \cdot \tan 2y = 1$ y la $\tan 3y$ no está definida.

Por tanto solo queda por analizar los casos en que $r^2 - 1 \neq 0$ y $1 - st \neq 0$. Dividiendo los dos lados de la igualdad $2r(1 - st) = (r^2 - 1)(s + t)$ por $(r^2 - 1)(1 - st)$ resulta

$$\frac{2r}{1 - r^2} + \frac{s + t}{1 - st} = 0.$$

Estas expresiones por separado serían las correspondients a las fórmulas de la tangente del ángulo doble y de la tangente de la suma. Ahora, utilizando la última expresión, distinguiremos los siguientes casos:

- Si $r = \tan y$, $s = \tan 2y$, $t = \tan 3y$ entonces $\tan 2y + \tan 5y = 0$ que admite como soluciones los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ inferiores a $\frac{7\pi}{2}$ con lo que

$$y \in \left\{\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}\right\}.$$

- Si $r = \tan 2y$, $s = \tan y$, $t = \tan 3y$ entonces $\tan 4y + \tan 4y = 0$ que admite como soluciones los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ inferiores a 4π, con lo que

$$y \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\},$$

y hemos rechazado $y = \frac{\pi}{2}$ ya que entonces $\tan y$ no sería un número real, y también $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$ ya que entonces $\tan(2y)$ tampoco sería un número real.

- Si $r = \tan 3y$, $s = \tan y$, $t = \tan 2y$ entonces $\tan 6y + \tan 3y = 0$ que admite como soluciones los múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ inferiores a $\frac{9\pi}{2}$, con lo que

$$y \in \left\{ \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9} \right\}.$$

Estos son todos los valores, y hemos terminado.

4. Calcular todos los pares de enteros (x, y) tales que

$$3^4 2^3 \left(x^2 + y^2\right) = x^3 y^3.$$

Solución. Nótese en primer lugar que si $xy = 0$, entonces $x^2 + y^2 = 0$, de donde resulta la solución $x = y = 0$. Nótese también que si $xy < 0$, entonces $x^2 + y^2 < 0$, absurdo, luego x, y tienen ambos el mismo signo. Como cambiar simultáneamente de signo a x y a y no altera la ecuación, podemos asumir a partir de este momento y sin pérdida de generalidad que x, y son ambos enteros positivos. Sean $x = 3^m a$ e $y = 3^n b$ con m, n enteros no negativos y a, b enteros coprimos y no divisibles por 3. Supongamos que $m \geq n$. Entonces la ecuación dad se transforma en

$$8((3^{m-n}a)^2 + b^2) = 3^{3m+n-4} a^3 b^3.$$

Como todo cuadrado perfecto da resto 0 o 1 al dividir entre 3, como es bien conocido, el miembro de la izquierda no es divisible por 3 y para que se cumpla la ecuación debe ser el exponente de 3 en el término de la derecha igual a cero. Es decir, $3m + n - 4 = 0$ y como $m \geq n \geq 0$ esto implica que $m = n = 1$. La ecuación ahora se simplifica y queda

$$8(a^2 + b^2) = a^3 b^3.$$

Por la simetría de la expresión podemos suponer que $a \geq b$. Entonces

$$16a^2 \geq a^3 b^3 \Leftrightarrow 16 \geq ab^3$$

y tenemos dos posibilidades (1) $b = 2$ de donde resulta $a = 2$, (2) $b = 1$ pero en este caso los únicos valores posibles de a son $1, 2, 4, 8$ y no satisfacen la ecuación $a^3 - 8a^2 - 8 = 0$. Se deduce que $(a, b) = (2, 2)$ y $(x, y) = (6, 6)$. Finalmente, se tiene que las únicas soluciones posibles son:

$$(x, y) = (-6, -6), \qquad (x, y) = (0, 0), \qquad (x, y) = (6, 6).$$

5. Calcular el valor mínimo del mayor valor del conjunto A, siendo

$$A = \{xy, xy - x - y + 1, x + y - 2xy, 0 \leq x \leq y \leq 1\}.$$

Solución 1. Haciendo el cambio de variable $xy = p$, y $x + y = s$ y escribiendo los tres elementos del conjunto A en términos de s y p, tenemos

$$a = xy = p, \quad b = xy - x - y + 1 = (1 - x)(1 - y) = s - 1 + p, \quad c = s - 2p$$

verificándose que $a + b + c = 1$. Observemos que $s^2 - 4p = (x - y)^2 \geq 0$.

Ahora consideremos los siguientes casos:

- Si $0 \leq x \leq y \leq \dfrac{1}{3} \Rightarrow p = xy \leq \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow b = (1 - x)(1 - y) \geq \dfrac{4}{9}$.
- Si $c = s - 2p \leq \dfrac{4}{9} \Rightarrow 0 \leq s^2 - 4p = \left(2p + \dfrac{4}{9}\right)^2 - 4p = 4\left(p - \dfrac{1}{9}\right)\left(p - \dfrac{4}{9}\right)$, de donde se deduce que $p \leq \dfrac{1}{9}$ ó $p \geq \dfrac{4}{9}$. Si $a = p \leq \dfrac{1}{9} \Rightarrow b \geq \dfrac{4}{9}, c = s - 2p \leq \dfrac{4}{9}$ y si $a = p \geq \dfrac{4}{9} \Rightarrow b \leq \dfrac{1}{9}, c \leq \dfrac{4}{9}$. Por lo tanto, en cualquier caso

$$\text{máx}\{A\} \geq \frac{4}{9}$$

Para hallar el mínimo $\dfrac{4}{9}$, las desigualdades deberán ser igualdades y se tiene:

- $p = \dfrac{1}{9}, s - 2p = \dfrac{4}{9} \Rightarrow s = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = y = \dfrac{1}{3}$,
- $p = \dfrac{4}{9}, s - 2p = \dfrac{4}{9} \Rightarrow s = \dfrac{4}{3} \Rightarrow x = y = \dfrac{2}{3}$.

Solución 2. En primer lugar, se observa que $xy + (xy - x - y + 1) + (x + y - 2xy) = 1$. Así, si uno de los tres elementos de A vale $\frac{1}{9}$ o menos, entonces los otros dos suman $\frac{8}{9}$ o más, luego si el menor valor de A vale $\frac{1}{9}$ o menos, el mayor valor de A vale $\frac{4}{9}$ o más.

Supongamos que $xy \geq x + y - 2xy$. Entonces, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica se tiene que

$$3xy \geq x + y \geq 2\sqrt{xy}, \qquad \sqrt{xy} \geq \frac{2}{3},$$

y el mayor valor de A es al menos $xy \geq \frac{4}{9}$ en este caso.

Supongamos que $xy - x - y + 1 \geq x + y - 2xy$. Nuevamente por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, se tiene que

$$3xy + 1 \geq 2(x + y) \geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow (3\sqrt{xy} - 1)(\sqrt{xy} - 1) \geq 0.$$

La última desigualdad se verifica cuando $\sqrt{xy} \geq 1$, con lo que el mayor valor de A sería al menos $xy \geq 1$, o bien $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{3}$, para $xy \leq \frac{1}{9}$, y por la observación inicial el mayor valor de A sería $\frac{4}{9}$ o más.

En cualquier otro caso, $x + y - 2xy$ es el mayor valor de A, y supongamos que es inferior a $\frac{4}{9}$. Es decir, $x + y - 2xy < \frac{4}{9}$. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se obtiene

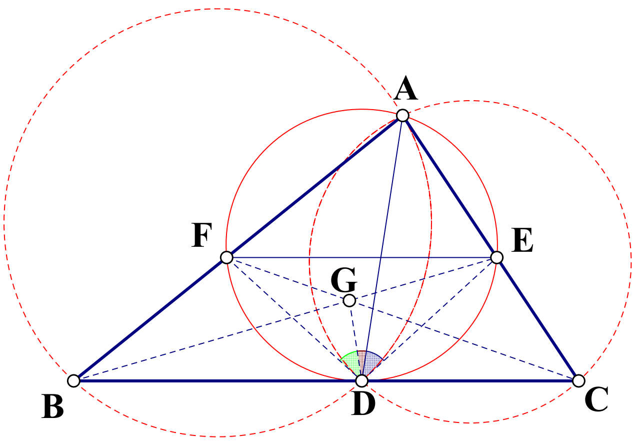
$$2xy + \frac{4}{9} > x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\sqrt{xy} - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{36} = \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

Si $\sqrt{xy} - \frac{1}{2} > \frac{1}{6}$, entonces $\sqrt{xy} > \frac{2}{3}$ y el mayor valor de A es al menos $xy > \frac{4}{9}$, contradicción. Si $\frac{1}{2} - \sqrt{xy} > \frac{1}{6}$, entonces $\sqrt{xy} < \frac{1}{3}$, con lo que $xy < \frac{1}{9}$, y por la observación inicial el mayor valor de A es mayor que $\frac{4}{9}$, contradicción.

Luego el mayor valor de A nunca puede ser menor que $\frac{4}{9}$, y ése valor es en efecto el mínimo que toma el máximo de A, pues se puede obtener $A = \left\{\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right\}$ tomando $x = y = \frac{2}{3}$, o $A = \left\{\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right\}$ tomando $x = y = \frac{1}{3}$. Viendo las condiciones de igualdad en los dos primeros casos analizados, se tiene además que éstos son todos los posibles pares de valores (x, y) para los que el mayor valor de A toma dicho valor mínimo.

6. En el triángulo escaleno ABC, la bisectriz de A corta al lado BC en el punto D. Las rectas que pasan por D tangentes a las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y ACD cortan a las rectas AC y AB en los puntos E y F, respectivamente. Si BE y CF se cortan en G, demostrar que $\angle EDG = \angle ADF$.

Solución. Se verifican las igualdades de ángulos $\angle ADE = \angle B$ y $\angle ADF = \angle C$, por ser ángulos semiinscritos en las circunferencias (ABD) y (ADC), respectivamente. Por



tanto el cuadrilátero $AFDE$ es inscriptible y de eso se deduce que

$$\angle AFE = \angle ADE = \angle B \quad \text{y} \quad \angle AEF = \angle ADF = \angle C,$$

y por tanto, EF es paralela a BC. Además $DE = DF$ por ser cuerdas correspondientes al ángulo $\angle A/2$, así que el triángulo FDE es isósceles.

Sea M el punto medio de EF, $L = AD \cap EF$, y $H = DG \cap EF$. Aplicando el teorema de Thales, se obtiene que

$$\frac{LE}{LF} = \frac{DC}{BD}$$

Por otro lado, de $\triangle FGH \sim \triangle CGD$ resulta

$$\frac{HF}{DC} = \frac{GH}{GD},$$

de $\triangle EGH \sim \triangle BGD$, se obtiene

$$\frac{HE}{BD} = \frac{GH}{GD}$$

y de aquí que

$$\frac{HF}{HE} = \frac{DC}{DB},$$

luego H y L son simétricos respecto de M, como vermos mas tarde, y $\angle LDM = \angle HDM = \alpha$ siendo

$$\alpha = 90^\circ - \angle ADC = \frac{\angle C - \angle B}{2} \text{ si } C > B,$$

y

$$\alpha = 90^\circ - \angle ADB = \frac{\angle B - \angle C}{2} \text{ si } B > C.$$

Finalmente, se tiene que

$$\angle GDE = \angle ADE - \alpha = \angle ADF \text{ si } B > C,$$

y

$$\angle GDE = \angle ADE + \alpha = \angle ADF \text{ si } B < C.$$

Ahora falta probar que L y H son simétricos respecto a M. En efecto, si denotamos $LF + LE = HF + HE = s$, entonces

$$\frac{LE}{LF} = \frac{HF}{HE},$$

de donde

$$\frac{s}{LF} = \frac{s}{HE} \Rightarrow LF = HE \text{ y } LE = HF$$

con lo que $HM = ML$ como se quería demostrar.

Problems

1. Let $p \geq 3$ be a prime number. If $a < b$ are positive integers then find the value of $\gcd(p^{2^a} + 1, p^{2^b} + 1)$.

2. Let D, E, F denote the feet of the altitudes of an acute triangle ABC, and let (X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2) denote the feet of perpendiculars from D, E, F, respectively, upon the other two sides of the triangle. Prove that the six points $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ lie on a circle.

3. Let OX and OY be two segments in the plane that form an acute angle α. Let $\mathcal{P} = X_1Y_1X_2Y_2 \cdots X_nY_n$ $(n \geq 2)$ be a closed polygonal line with $X_i \in OX$ and $Y_i \in OY$ for all $1 \leq i \leq n$. The sides of $\mathcal{P}$ are colored red or blue in such a way that X_iY_i is red and Y_iX_{i+1} is blue for all $1 \leq i \leq n$ (subscripts are taken modulo n). If R and B are the total length of segments colored red and blue respectively, then prove that

$$\frac{R}{B} \geq \sin\frac{\alpha}{2}.$$

4. Consider the binomial coefficients $\binom{m}{n}$, where $1 \leq m \leq 1919$ and $0 \leq n \leq m$ (that is, the numbers corresponding to the rows of Tartaglia's triangle from 1 to 1919). Determine how many of these numbers are odd.

Solutions

1. Let $p \geq 3$ be a prime number. If $a < b$ are positive integers then find the value of $\gcd(p^{2^a}+1, p^{2^b}+1)$.

Solution. Using induction on b we have

$$p^{2^b}-1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)(p^{2^2}+1)\dots(p^{2^{b-1}}+1),$$

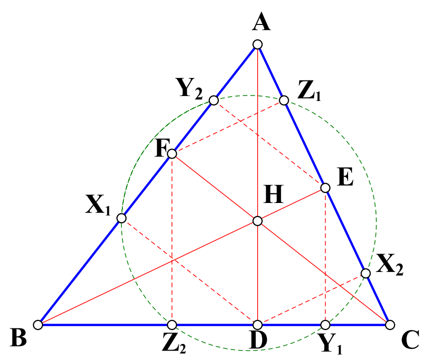
and since $a < b$ then $p^{2^a}+1$ is a divisor of $p^{2^b}-1$. Thus, the gcd of $p^{2^a}+1$ and $p^{2^b}+1$ divides both $p^{2^b}-1$ and $p^{2^b}+1$. Therefore, it divides their difference

$$(p^{2^b}+1)-(p^{2^b}-1) = 2,$$

and it is exactly 2.

2. Let D, E, F denote the feet of the altitudes of an acute triangle ABC, and let (X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2) denote the feet of perpendiculars from D, E, F, respectively, upon the other two sides of the triangle. Prove that the six points $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ lie on a circle.

Solution. Let H be the orthocenter of $\triangle ABC$, and let Z_2 and Y_1 lie on BC, X_2 and Z_1 on CA, and Y_2 and X_1 on AB as shown in the figure below.



Scheme for solving problem 2

From $\triangle BDX_1 \sim \triangle BFZ_2$, we get

$$\frac{BX_1}{BZ_2} = \frac{BD}{BF},$$

from $\triangle BEY_2 \sim \triangle BHF$, we have

$$\frac{BY_2}{BF} = \frac{BE}{BH} \Leftrightarrow \frac{BY_2}{BE} = \frac{BF}{BH}.$$

Likewise, from $\triangle BEY_1 \sim \triangle BHD$, we obtain

$$\frac{BY_1}{BD} = \frac{BE}{BH} \Leftrightarrow \frac{BY_1}{BE} = \frac{BD}{BH}.$$

Dividing up the last two equalities, yields

$$\frac{BY_1}{BY_2} = \frac{BD}{BF} = \frac{BX_1}{BZ_2} \Leftrightarrow BY_1 \cdot BZ_2 = BX_1 \cdot BY_2.$$

Hence Y_2, X_1, Z_2, Y_1 lie on a circle Γ_1; and similarly Z_2, Y_1, X_2, Z_1 lie on a circle Γ_2; and X_2, Z_1, Y_2, X_1 lie on a circle Γ_3. If Γ_1 and Γ_2, for example, coincide, the statement is proved. If they are distinct their radical axis is the line BC. Thus, if our statement is not true, we have three distinct circles Γ_1, Γ_2 and Γ_3, whose radical axes, taking the circles in pairs, form the sides of triangle ABC, which contradicts the theorem that such radical axes are either concurrent or parallel, as it is well-known.

3. Let OX and OY be two segments in the plane that form an acute angle α. Let $\mathcal{P} = X_1Y_1X_2Y_2 \cdots X_nY_n$ ($n \geq 2$) be a closed polygonal line with $X_i \in OX$ and $Y_i \in OY$ for all $1 \leq i \leq n$. The sides of $\mathcal{P}$ are colored red or blue in such a way that X_iY_i is red and Y_iX_{i+1} is blue for all $1 \leq i \leq n$ (subscripts are taken modulo n). If R and B are the total length of segments colored red and blue respectively, then prove that

$$\frac{R}{B} \geq \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Solution. Let $R = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i$ and $B = \sum_{i=1}^{n} Y_iX_{i+1}$. For all $1 \leq i \leq n$, we have

$$Y_iX_{i+1} \leq OY_i + OX_{i+1}$$

on account of triangular inequality. Adding up these expressions, yields

$$B = \sum_{i=1}^{n} Y_iX_{i+1} \leq \sum_{i=1}^{n} (OY_i + OX_{i+1})$$

Using Cosine Law and the AM-GM-QM inequalities, we have

$$\begin{aligned} X_iY_i^2 &= OX_i^2 + OY_i^2 - 2\,OX_i \cdot OY_i \cos\alpha \\ &\geq OX_i^2 + OY_i^2 - (OX_i^2 + OY_i^2)\cos\alpha \\ &= (OX_i^2 + OY_i^2)\,(1 - \cos\alpha) \\ &\geq \frac{(OX_i + OY_i)^2}{2}\,(1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

from which

$$X_iY_i \geq (OX_i + OY_i)\sqrt{\frac{2}{1 - \cos\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha/2}$$

follows. Adding up the above expressions, we get

$$B \leq \sum_{i=1}^{n} (OY_i + OX_{i+1}) \leq \frac{1}{\sin\alpha/2} \sum_{i=1}^{n} X_iY_i = \frac{R}{\sin\alpha/2}$$

from which the statement follows.

4. Consider the binomial coefficients $\binom{m}{n}$, where $1 \leq m \leq 1919$ and $0 \leq n \leq m$ (that is, the numbers corresponding to the rows of Tartaglia's triangle from 1 to 1919). Determine how many of these numbers are odd.

Solution. We first prove that the cardinality of the set of odd numbers in a row of Tartaglia's triangle is given by

$$2^{\#\text{ ones in the binary expansion of } n}$$

(for instance, the number of odd number between $\binom{5}{i}$ where $0 \leq i \leq 5$, is 2^2). To see this, recall first that $(a+b)^2 \equiv a^2 + b^2 \mod 2$. Next, consider the binary decomposition of n, as $n = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k}$. Therefore,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = (1+x)^n = (1+x)^{2^{a_1}+\ldots+2^{a_k}} \equiv (1+x^{2^{a_1}}) \cdots (1+x^{2^{a_k}}) \pmod 2.$$

Expanding the latter product we get 2^k summands, each of the form x raised to a sum of powers of 2; since each of them is different, we get that in $\binom{n}{i}x^i$ there are exactly 2^k non-zero terms, as claimed.
Now, we just have to do the corresponding sum between the rows 1 and 1919; for simplicity, let us first count the number of odd terms in the first 2047 rows (the closest power of two to 1919). There are $\binom{11}{i}$ numbers between 1 and 2047 with exactly i ones in its decomposition, for $1 \leq i \leq 11$. This is because these numbers can be seen as words of length 11 where each letter is either 0 or 1. Hence, we have that the desired value is given by

$$\sum_{i=1}^{11} \binom{11}{i} 2^i.$$

Observe that

$$(1+x)^{11} = \sum_{i=0}^{11} \binom{11}{i} x^i,$$

and hence

$$\sum_{i=1}^{11} \binom{11}{i} 2^i = 3^{11} - 1.$$

Now, we just have to discount the number of odd numbers in the rows $2047 - i$, with $0 \leq i \leq 127$. The number of ones in the binary decomposition of $2047 - i$ is 11 minus the number of ones in the binary decomposition of i. But between 0 and 127 we have $\binom{7}{i}$ numbers with i ones, $0 \leq i \leq 7$, and hence we have to subtract

$$\sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} 2^{11-i} = 2^{11}\Big(\sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} \Big(\frac{1}{2}\Big)^i\Big) = 2^{11}\Big(\sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} \Big(\frac{1}{2}\Big)^i\Big) =$$

$$= 2^{11} \cdot (3/2)^7 = 2^4 \cdot 3^7.$$

Then, the number of odd numbers in the first 1919 rows is

$$3^{11} - 2^4 \cdot 3^7 - 1.$$

Problems

1. Triangle ABC, in which $\angle A = 60^\circ$ and $D \in BC$ is such that AD is the internal bisector of angle $\angle A$. Let r_B, r_C and r be the inradius of the triangles ABD, ADC and ABC, respectively. Show that

$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

where a, b and c are the lengths of the sides BC, AC and AB of triangle ABC.

2. Prove that there exist infinitely many positive integers x, y, z for which the sum of the digits in the decimal representation of $4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz$ is 2.

3. Let P be an interior point to an equilateral triangle of altitude one. If x, y, z are the distances from P to the sides of the triangle, then prove that

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz.$$

4. Let $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$ be a sequence of $s \geq 2$ positive integers, none of which can be written as the sum of (two or more) distinct other numbers in the sequence. For every integer r with $1 \leq r < s$, prove that $r \cdot m_r + m_s \geq (r+1)(s+1)$.

Solutions

1. *Triangle ABC, in which $\angle A = 60^\circ$ and $D \in BC$ is such that AD is the internal bisector of angle $\angle A$. Let r_B, r_C and r be the inradius of the triangles ABD, ADC and ABC, respectively. Show that*

$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

where b and c are the lengths of the sides AC and AB of triangle ABC.

Solution. It is well-known that the bisector AD is given by

$$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} = \frac{bc\sqrt{3}}{b+c}$$

because $\angle A = 60^\circ$. Let $h = AM$ be the length of the altitude from A in $\triangle ABC$. On account of the internal bisector theorem, we have

$$BD = \frac{ac}{b+c} \quad \text{and} \quad CD = \frac{ab}{b+c}.$$

Let $p_{ABC} = \dfrac{BD + DA + AB}{2}$ be the semiperimeter of $\triangle ABD$. If we denote by $[ABD]$ the area of triangle ABD, then we have

$$r_B = \frac{[ABD]}{p_{ABD}} = \frac{h \cdot BD}{2 \cdot p_{ABD}} = \frac{h \cdot BD}{BD + DA + AB} = \frac{\frac{h \cdot ac}{b+c}}{\frac{ac}{b+c} + \frac{bc\sqrt{3}}{b+c} + c} = \frac{ah}{2p + \sqrt{3} \cdot b},$$

and likewise, we get

$$r_C = \frac{ah}{2p + \sqrt{3} \cdot b},$$

where $p = (a+b+c)/3$.

From the above, we have

$$\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{2p + \sqrt{3} \cdot b}{ah} + \frac{2p + \sqrt{3} \cdot c}{ah} = \frac{4p + (b+c)\sqrt{3}}{2\,[ABC]}$$

$$= \frac{2}{r} + \frac{2 \cdot (b+c)\sqrt{3}}{2 \cdot bc \sin 60^\circ} = 2\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

and we are done.

2. *Prove that there exist infinitely many positive integers x, y, z for which the sum of the digits in the decimal representation of $4x^4 + y^4 - z^2 + 4xyz$ is 2.*

Solution. We have a lot of solutions. Indeed, we have

$$\begin{aligned}4x^4+y^4-z^2+4xyz &= (4x^4+y^4+4x^2y^2)-(4x^2y^2+z^2-4xyz)\\ &= (2x^2+y^2)^2-(2xy-z)^2\\ &= (2x^2+y^2-2xy+z)(2x^2+y^2+2xy-z)\end{aligned}$$

The two factors $A = 2x^2+y^2-2xy+z$ and $B = 2x^2+y^2+2xy-z$ add up to $A+B = 4x^2+2y^2$. If we choose the values of x and y so that $A = 4x^2 = 4\cdot 5^{2n+2}$ and $B = 2y^2 = 2\cdot 2^{2n}$, then the product will become $AB = 2\cdot 10^{2n+2}$ and the sum of the digits will be equal 2.

Summarizing, we pick up an integer $n \geq 1$ and set $x = 5^{n+1}$ and $= 2^n$. The desired equation $A = 4x^2$ is equivalent to $2x^2+y^2-2xy+z = 4x^2$, and hence

$$z = 2x^2+2xy-y^2 = 2\cdot 5^{2n+2}+10^{n+1}-4^n.$$

Note that z indeed is a positive integer. As the described choice of x, y, z then yields

$$4x^4+y^4-z^2+4xyz = 2\cdot 10^{2n+2},$$

and the proof is complete.

3. *Let P be an interior point to an equilateral triangle of altitude one. If x, y, z are the distances from P to the sides of the triangle, then prove that*

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz.$$

Solution. It is well-known that in an equilateral triangle the sum of the distances from an interior point P to its sides equals the altitude of the triangle, as can be easily proven. On account of the preceding, we have to prove that if $x+y+z=1$ then it holds that

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz$$

To do it, we begin observing that when $x+y+z=1$, then

$$xy+yz+zx \geq 9xyz$$

Indeed, applying AM-GM inequality, we get

$$xy+yz+zx = (xy+yz+zx)(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}\cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 9xyz$$

or

$$xy+yz+zx-3xyz \geq 6xyz$$

On account of the constrain and the preceding inequality, we obtain

$$\begin{aligned}xy+yz+zx-3xyz &= xy(1-z)+yz(1-x)+zx(1-y)\\ &= xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\\ &\geq 6xyz\end{aligned}$$

Adding 1 to both terms of the last inequality and reordering terms, yields

$$(x+y+z)^2+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)-6xyz \geq 1$$

or equivalently,

$$x^2+y^2+z^2+2xy(1-z)+2yz(1-x)+2zx(1-y)+xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \geq 1,$$

and

$$x^2+y^2+z^2+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3zx(z+x) \geq 1 = (x+y+z)^3$$

from which

$$x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3+6xyz$$

follows. Equality holds when $x=y=z=1/3$. That is, when P is the centroid of the triangle, and we are done.

4. *Let $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$ be a sequence of $s \geq 2$ positive integers, none of which can be written as the sum of (two or more) distinct other numbers in the sequence. For every integer r with $1 \leq r < s$, prove that $r \cdot m_r + m_s \geq (r+1)(s+1)$.*

Solution. For k, ℓ with $0 \leq k \leq r$ and $k+1 \leq \ell \leq s$, we introduce the auxilairy value

$$T(k,\ell) = m_\ell + \sum_{i=1}^{k} m_i.$$

Next, we count the number of elements of the set

$$A = \Big\{ T(k,\ell) \,|\, 0 \leq k \leq r \text{ and } k+1 \leq \ell \leq s \Big\}.$$

For $k=0$ we have s possible values for ℓ, for $k=1$ we have $s-1$ values for ℓ, and so on until for $k=r$ we have $s-r$ values for ℓ. Adding up the preceding, we get

$$|A| = s+(s-1)+(s-2)+\ldots+(s-r) = (r+1)s - \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2}(r+1)(2s-r).$$

Now we claim that these $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ auxiliary values are all pairwise distinct. Indeed, let us assume that $T(k,\ell) = T(u,v)$. WLOG we may assume that $k \leq u$, so the last equality turns into

$$m_\ell = m_v + \sum_{i=k+1}^{u} m_i.$$

But then m_ℓ can be written as a sum of distinct other numbers in the sequence, unless $\ell = v$ and $k = u$ holds. Hence the auxiliary values indeed are distinct. As altogether there are $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$ auxiliary values, the largest value $T(r,s)$ must be at least $\frac{1}{2}(r+1)(2s-r)$. This yields

$$\frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \leq T(r,s) = m_s + \sum_{i=1}^{r} m_i \leq m_s + \sum_{i=1}^{r}(m_r - r + i).$$

Here we used that $m_i \leq m_r - r + i$, which follows as the sequence is increasing. The above inequality can be rewritten into

$$\frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \leq m_s + \sum_{i=1}^{r}(m_r - r + i) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(r+1)(2s-r) \leq m_s + rm_r - r^2 + \frac{r(r+1)}{2}$$

or

$$r \cdot m_r + m_s \geq rs + s - r \geq (r+1)(s-1),$$

and we are done.

Problems

1 On the interior of each side of a triangle ABC draw n distinct points. Join the points from the sides AB and AC with the points on the side BC. Determine the maximum number of intersection points in the interior of $\triangle ABC$.

2 Determine all the positive integer solutions of the equation

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1.$$

3 Determine the smallest M greater than 2019 for which the set

$$X = \{2019, 2020, \cdots, M\}$$

can be expressed as a disjoint union of subsets of X, so that in each of them there is an element equal to the sum of the remaining elements of that subset.

4 Cyclic quadrilateral ABC is in scribed in a circle of center O and radius R. Points $E \in CD$ and $F \in AB$ verify that $EO = FO$. Lines AD and BC cut line EF at points M and N, respectively. Let P be the symmetric point of M respect to the midpoint of segment AE. Prove that triangles FBN and CEP are similar.

Solutions

1. *On the interior of each side of a triangle ABC draw n distinct points. Join the points from the sides AB and AC with the points on the side BC. Determine the maximum number of intersection points in the interior of $\triangle ABC$.*

Solution. Denote the points in the interior of AB (starting from A) with $C_1, C_2, \ldots, C_n$, the points interior to BG (starting from B) with $B_1, B_2, \ldots, B_n$ and the points interior to CA (starting from C) with $A_1, A_2, \cdots, A_n$. Joining B_1 with the points A_i and C_i $(1 \leq i \leq n)$ no intersection point is created. The segment B_2C_i, intersects B_1C_j if $1 \leq j \leq i-1$ (B_2C_i and B_1C_j are the diagonals of the convex quadrilateral $B_1B_2C_jC_i$), so there are $i-1$ intersections. In the same time B_2C_i intersects B_1A_j for $1 \leq j \leq n$ creating $n+i-1$ intersections.
The segment B_2A_i $(1 \leq i \leq n)$ intersects B_1A_j if $1 \leq j \leq i-1$ (in $i-1$ intersection points), so by drawing all the line segments from B_2 we obtain

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) + n + \ldots + (n+n-1) = n(2n-1)$$

intersection points on the lines starting from B_1. The number of intersection points of the segments whose end point is B_k $(2 \leq k \leq n)$ with the segments whose end point is B_1 $(2 \leq k \leq n)$ is the same as the number of the intersection points determined by the segments starting from B_2 and B_1. But this is $n \cdot (2n-1)$. The condition $\ell < k$ implies the existence of $k-1$ points B_ℓ , so the segments from B_k determine

$$(k-1)n(2n-1)$$

intersection points. This implies that by drawing the segments corresponding to all the points B_k we obtain

$$N = \sum_{k=1}^{n} (k-1)n(2n-1) = \frac{n^2(n-1)(2n-1)}{2}$$

intersection points.

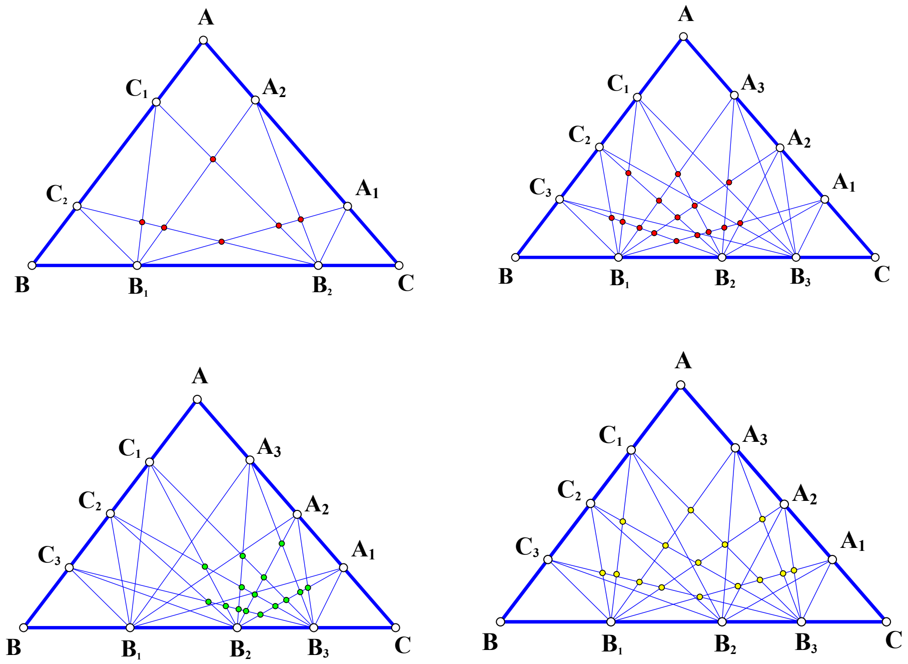
For $n = 1$ we get $N = 0$ intersection points. For $n = 2$ we obtain $N = 6$ intersection points (see figure). For $n = 3$ we illustrate this counting process in the figure:

1. Intersection points of segments starting from B_2 with segments starting from B_1.
2. Intersection points of segments starting from B_3 with segments starting from B_2.
3. Intersection points of segments starting from B_3 with segments starting from B_1.

We obtain $N = 45$ intersection points.

2. *Determine all the positive integer solutions of the equation*

$$4^a \cdot 5^b - 3^c \cdot 11^d = 1.$$



Number of intersection points for Problem 1.

Solution. Working modulo 3, we have $5^b \equiv 2^b \equiv 1$, and b is even, say $b = 2x$, with $x \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$4^a \cdot 5^{2x} - 1 = \left(2^a \cdot 5^x - 1\right)\left(2^a \cdot 5^x + 1\right) = 3^c \cdot 11^d.$$

Now, we consider the following cases:

i) $\{2^a \cdot 5^x - 1 = 11^d, \qquad 2^a \cdot 5^x + 1 = 3^c\}$, or

ii) $\{2^a \cdot 5^x + 1 = 11^d, \qquad 2^a \cdot 5^x - 1 = 3^c\}$.

Case (i) it is not possible, because modulo 5, $11^d \equiv 1$ (and not -1).

Next, we consider the second case. Since $11 = 2 \cdot 5 + 1$, then the triple $d = 1, x = 1$ and $a = 1$ is a solution. Moreover, $2 \cdot 5 - 1 = 9 = 3^2$, and $c = 2$ from which

$$(a, b, c, d) = (1, 2, 2, 1)$$

as a solution follows.

Now, we will see that there are no more solutions. Indeed, if $d \geq 2$, then $c \geq 5$, and we get

$$2^a \cdot 5^x = 11^d - 1 = 3^c + 1 \Rightarrow 11^d - 11 = 3^c - 9,$$

or

$$11\left(11^{d-1} - 1\right) = 3^2\left(3^{c-2} - 1\right).$$

Therefore, 11 divides $3^{c-2}-1$. That is, $3^{c-2} \equiv 1 \pmod{11}$. Since the order of 3 in $\mathbb{Z}_{11}$ is 5, then $c-2$ is a multiple of 5, and

$$3^5 - 1 \,|\, 3^{c-2} - 1.$$

Therefore, $2 \cdot 11^2 = 242 = 3^5 - 1$ is a divisor of $11(11^{d-1}-1)$, which is impossible.

3. *Determine the smallest M greater than 2019 for which the set*

$$X = \{2019, 2020, \cdots, M\}$$

can be expressed as a disjoint union of subsets of X, so that in each of them there is an element equal to the sum of the remaining elements of that subset.

Solution. Suppose $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots X_k$. The element $a_i \in X_i$ is called *especial* if a_i is equal to the sum of the remaining elements of X_i. It is evident that if any of these subsets contains some special element, then it must have at least three elements. Thus, the total number of elements of X is $M - 2018$, and the number k of subsets of the partition verifies

$$k \leq \frac{M-2018}{3}.$$

On the other hand, the sum of all elements of X is

$$S = 2019 + 2020 + \cdots + M = \frac{(M+2019)(M-2018)}{2}.$$

Note that if $a_i \in M_i$ is especial, then ye sum of the elements of M_i is $2a_i$. So, the sum S of the numbers of all M_i, verifies

$$\begin{aligned} S &\leq 2\left(M + (M-1) + (M-1) + \cdots (M-k+1)\right) \\ &= 2\frac{(M+M-k+1)k}{2} = (2M-k+1)\,k \\ &\leq \left(2M+1-\frac{M-2018}{3}\right) \cdot \frac{M-2018}{3} \\ &= \frac{(5M+2021)(M-2018)}{9} \Leftrightarrow S = \frac{M+2019}{2} \leq \frac{5M+2021}{9} \end{aligned}$$

on account that $k \leq \dfrac{M-2018}{3}$). From the preceding, we get

$$9(M+2019) \leq 2(5M+20121)$$

and

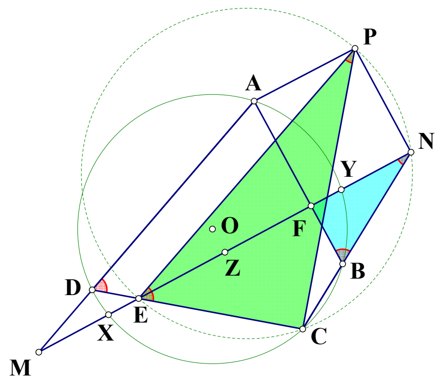
$$M \geq 9 \cdot 2019 - 2 \cdot 2021 = 7 \cdot 2019 - 4 = 14129.$$

Now, remains to prove that with $M = 14129$ (the set X would have $M - 2018 = 14129 - 2018 = 12111$ elements) is possible to obtain the partition of the statement, using 4037 subsets, with three elements each one. Indeed, we will take in each subset the 4037 largest elements as special, from $7 \cdot 2019 - 4 = 14129$ to $5 \cdot 2019 - 2 = 10093$, completing with the following and taking care of maintaining the condition of special for the largest element of each subset to obtain:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{7 \cdot 2019 - 4, 5 \cdot 2019 - 3, 2 \cdot 2019 - 1\}, \\ M_2 &= \{7 \cdot 2019 - 5, 5 \cdot 2019 - 5, 2 \cdot 2019\}, \\ M_3 &= \{7 \cdot 2019 - 6, 5 \cdot 2019 - 7, 2 \cdot 2109 + 1\}, \\ &\cdots\cdots \\ M_{4037} &= M_{2 \cdot 2019 - 1} = \{5 \cdot 2019 - 2, 3 \cdot 2019, 2 \cdot 2019 - 2\}. \end{aligned}$$

4. Cyclic quadrilateral ABC is in scribed in a circle of center O and radius R. Points $E \in CD$ and $F \in AB$ verify that $EO = FO$. Lines AD and BC cut line EF at points M and N, respectively. Let P be the symmetric point of M respect to the midpoint of segment AE. Prove that triangles FBN and CEP are similar.

Solution. Let X and Y be the intersection points of the line EF with the circumference circumscribed to quadrilateral $ABCD$. We will prove that $ME = FN$. Indeed, if Z



is the midpoint of segment XY, the condition $OE = OF$ implies that Z is also the midpoint of EF. Then M and N are symmetric points respect to Z, and $ME = FN$. Since $EMAP$ is a parallelogram, we have the equality of vectors $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{FN}$, and this prove that $APNF$ is also a parallelogram. In particular, quadrilateral $PNCE$ is cyclic because it has sides parallel to $ABCE$.

Now, we have
$$\angle CEP = \angle CDA = 180^\circ - \angle CBA = \angle FBN$$
and
$$\angle EPC = \angle ENC = \angle FBN$$
because they subtend the same arc.

Enunciados

1. Let $\mathbb{Z}$ be the set of integers. Determine all functions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that, for all integers a and b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

2. In triangle ABC, point A_1 lies on side BC and point B_1 lies on side AC. Let P and Q be points on segments AA_1 and BB_1, respectively, such that PQ is parallel to AB. Let P_1 be a point on line PB_1 such that B_1 lies strictly between P and P_1, and $\angle PP_1C = \angle BAC$. Similarly, let Q_1 be a point on line QA_1 such that A_1 lies strictly between Q and Q_1, and $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Prove that points P, Q, P_1, and Q_1 are concyclic.

3. A social network has 2019 users, some pairs of whom are friends. Whenever user A is friends with user B, user B is also friends with user A. Events of the following kind may happen repeatedly, one at a time:

Three users A, B, and C such that A is friends with both B and C, but B and C are not friends, change their friendship statuses such that B and C are now friends, but A is no longer friends with B, and no longer friends with C. All other friendship statuses are unchanged.

Initially, 1010 users have 1009 friends each, and 1009 users have 1010 friends each. Prove that there exists a sequence of such events after which each user is friends with at most one other user.

4. Find all pairs (k, n) of positive integers such that

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

5. The Bank of Bath issues coins with an H on one side and a T on the other. Harry has n of these coins arranged in a line from left to right. He repeatedly performs the following operation: if there are exactly $k > 0$ coins showing H, then he turns over the k-th coin from the left; otherwise, all coins show T and he stops. For example, if $n = 3$ the process starting with the configuration THT would be $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, which stops after three operations.

(a) Show that, for each initial configuration, Harry stops after a finite number of operations.

(b) For each initial configuration C, let $L(C)$ be the number of operations before Harry stops. For example, $L(THT) = 3$ and $L(TTT) = 0$. Determine the average value of $L(C)$ over all 2^n possible initial configurations C.

6. Let I be the incentre of acute triangle ABC with $AB \neq AC$. The incircle ω of ABC is tangent to sides BC, CA, and AB at D, E, and F, respectively. The line through D perpendicular to EF meets ω again at R. Line AR meets ω again at P. The circumcircles of triangles PCE and PBF meet again at Q.
Prove that lines DI and PQ meet on the line through A perpendicular to AI.

Soluciones equipo español

The 60th edition of the International Mathematical Olympiad took place in July 2019 in Bath (United Kingdom). The number of countries attending the competition with at least one contestant was 114, a new record for the IMO. The number of contestants was also impressive: there were 643 this year. The competition was developed in two consecutive days, and contestants had to solve three problems each day in a maximum time of four hours and a half. Each problem was graded with an integer mark between 0 and 7 points, so the maximum possible score was 42 points, achieved this year by six students. According to the usual standards, at most half of the students can get a medal, and then these are awarded in the proportion 1:2:3 for gold, silver and bronze, respectively. Under these circumstances, the number of points needed to get a bronze distinction were 17; for a silver medal, 24 points were necessary, and only those who reached 31 points got a gold medal. By countries, both the People's Republic of China and the United States of America got 227 points out of 252, while the Republic of Korea was just one point below.
Spain made an outstanding performance, with a new record of points (110) and relative position. They finished in the 42nd position and, for the first time, five of the students got a bronze medal, while the remaining one got an honorable mention. The team was composed by Pau Cantos (22 points), Leonardo Costa (21), Albert López (19), Oriol Baeza (17), Pablo Soto (17), and Juan Brieva (14). The delegation was completed by María Gaspar, as the chief of the delegation, and by Óscar Rivero, as the deputy leader. We present now the four problems which were solved by at least one Spaniard contestant (problems 1, 2, 4 and 5), and include the solutions given to them by our team (in some case slightly modified by the deputy leader). In all the cases, the solutions follow the ideas presented by the contestants, but we have done some little modifications to ease the exposition.

Problem 1. Let $\mathbb{Z}$ be the set of integers. Determine all functions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that, for all integers a and b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Comment. Five of the students gave complete solutions to this question. All of them require an algebraic manipulation before getting that any solution to the functional equation is of the form $f(x) = Cx + d$, where C and d are integer constants; after that, one has to guess which are the possible values for the constants. There are two main approaches for the first (and harder) part: either by different substitutions (as sketched in the first solution we present) or by passing to a Cauchy equation, whose solutions are well-known (as presented in the second solution, which assumes certain knowledge of functional equations by the reader of this note).

Solution by Juan Brieva Ramírez. Setting $a = 0$ and $b = 0$, we obtain

$$3f(0) = f(f(0)). \tag{1}$$

When we evaluate the given expression at $(a, 0)$ and $(0, a)$ and subtract both equations, one gets

$$f(2a) + f(0) = 2f(a). \tag{2}$$

Using now (2), from the original equation we have

$$2f(a) + 2f(b) = f(f(a + b)) + f(0). \tag{3}$$

If we do $b \mapsto -a$ in (3), and then use (1), we obtain

$$f(a) + f(-a) = 2f(0). \tag{4}$$

We finally substitute $(-a, a + 1)$ in the given equation and, using (4), one gets

$$f(a + 1) - f(a) = C,$$

where $C = \frac{f(f(1))-4f(0)}{2}$. Since the difference between two consecutive integers is a constant, we have that all possible functions are of the form $f(x) = Cx + d$.
From the condition (1),

$$3d = f(d) = Cd + d,$$

and then, either $d = 0$ or $C = 2$. In the latter case, an easy check shows that all the solutions of the form $f(x) = 2x + d$ are valid and satisfy the given condition. If $d = 0$, one easyly gets that either $C = 2$ (and this solution is already included in the previous case) or $C = 0$ (and this solution clearly satisfies the given condition).
We conclude that the possible solutions are either $f(x) \equiv 0$, or $f(x) = 2x + d$, where $d \in \mathbb{Z}$.

Solution by Oriol Baeza Guasch. As in the previous solution, a straightforward substitution gives

$$2f(a) + f(0) = f(f(a)),$$

and setting $a = x + y$,

$$2f(x + y) + f(0) = f(f(x + y)) = 2f(x) + 2f(y) - f(0). \tag{5}$$

Therefore,

$$f(x + y) - f(0) = (f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)). \tag{6}$$

Defining $g(x) = f(x) - f(0)$, equation (6) gives

$$g(x + y) = g(x) + g(y). \tag{7}$$

But (7) is a Cauchy equation, whose unique solutions are given by $g(x) = Cx$, where $C \in \mathbb{Z}$. Then, all possible solutions have the form $f(x) = Cx + f(0)$. Proceeding as before by substituting in the original equation, we get that either $f(0) = 0$ or $C = 2$, and by a careful analysis of each case we get that either $f(x) \equiv 0$, or $f(x) = 2x + f(0)$, with $f(0) \in \mathbb{Z}$.

Problem 2. In triangle ABC, point A_1 lies on side BC and point B_1 lies on side AC. Let P and Q be points on segments AA_1 and BB_1, respectively, such that PQ is parallel to AB. Let P_1 be a point on line PB_1 such that B_1 lies strictly between P and P_1, and $\angle PP_1C = \angle BAC$. Similarly, let Q_1 be a point on line QA_1 such that A_1 lies strictly between Q and Q_1, and $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. Prove that points P, Q, P_1, and Q_1 are concyclic.

Solution by Pablo Soto Martín. Let X stand for the cut point of the circumcircle of A_1CQ_1 with AA_1. Similarly, let Y denote the intersection of the circumcircle of B_1CP_1 with BB_1.
We begin by claiming that both X and Y belong to the circumcircle of ABC. This is true because

$$\angle A_1XC = \angle A_1Q_1C = \angle ABC$$

and

$$\angle B_1YC = \angle B_1P_1C = \angle BAC.$$

We now prove that the following three quadrilaterals are cyclic: $PQXQ_1$, $PQYP_1$, and $PQXY$. In particular, these three facts together imply that PQP_1Q_1XY is cyclic, and we are done.
Begin with $PQXQ_1$. In this case,

$$\angle QPX = \angle BAX = \angle BCX = \angle A_1Q_1X = \angle QQ_1X. \tag{8}$$

For $PQYP_1$, the proof is symmetric, following the same angle chasing procedure as in (8). Finally, for $PQXY$ we just observe that

$$\angle PQY = \angle ABY = \angle AXY = \angle PXY,$$

and hence the conclusion follows.

Problem 4. Find all pairs (k, n) of positive integers such that

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

Notation. As a general piece of notation for the two solutions we present, for a given prime p, let $v_p(n)$ stand for the greatest integer such that $p^{v_p(n)}$ divides n but $p^{v_p(n)+1}$ does not. All the approaches to the problem are based on comparing the growth of both sides: one option is by using two different primes (as shown in the second solution), and the other one is using one prime and the usual absolute value (as shown in the first solution, which is maybe the most natural approach to the problem, although in the last part it requires some nasty computations). The second solution uses as a well-known fact the *lifting the exponent lemma*.

Solution by Pau Cantos Coll. We begin by observing that

$$v_2(k!) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + \ldots < \frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{8} + \ldots = k.$$

Since

$$v_2((2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1})) = \frac{n(n-1)}{2},$$

we obtain that

$$\frac{n(n-1)}{2} < k. \tag{9}$$

On the other hand, we have

$$2^{n^2} > (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}) = k!. \tag{10}$$

Putting (9) and (10) together, one gets

$$2^{n^2} > \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!. \tag{11}$$

For $n = 7$, this is false, since

$$21! = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 > 2^{18} \cdot 2^9 \cdot 2^8 \cdot 2^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^4 > 2^{49}.$$

We now show by induction that, indeed, the opposite inequality as that of (11) holds for $n \geq 7$. For $n = 7$ it has already been checked. Then, using the induction hypothesis, we obtain

$$\begin{aligned}\Big(\frac{(n+1)n}{2}\Big)! > \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)^n \Big(\frac{n(n-1)}{2}\Big)! > 8^n \cdot 2^{n^2} \\ = 2^{n^2+3n} > 2^{n^2+2n+1} = 2^{(n+1)^2},\end{aligned}$$

and we have proved that there are no solutions for $n \geq 7$.
Small cases have to be checked by hand.

- When $n = 6$, the right hand side is $63 \cdot 62 \cdot 60 \cdot 56 \cdot 48 \cdot 32$. Since 31 is a prime dividing 62, $k \geq 31$ and then the left hand side would be clearly greater than the right hand side.
- When $n = 5$, the right hand side is $31 \cdot 30 \cdot 28 \cdot 24 \cdot 16$. Since 31 is prime, $k \geq 31$ and then, as before, the left hand side would be greater than the right hand side.
- When $n = 4$, the right hand side is $15 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 8$. Then, $k \geq 7$; if $k = 7$, the 2-adic valuation of both sides does not agree. If $k \geq 14$, the left hand side is bigger than the right hand side.
- When $n = 3$, the right hand side is $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$, which is not a factorial of an integer number.
- When $n = 2$, the right hand side is $6 = 3!$, so $(3, 2)$ is a solution.
- When $n = 1$, we obtain the solution $(1, 1)$.

Therefore, the unique possible solutions are $(3, 2)$ and $(1, 1)$.

Solution by Albert López Bruch. We compare the 5-adic and 7-adic valuations of both sides to reach a contradiction. We begin with the prime 7. In this case, for determining

$$R_7(n) \coloneqq v_7((2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \cdots (2^2 - 1)(2 - 1)),$$

we just recall that, by virtue of the *lifting the exponent lemma*, $v_7(2^\ell - 1) = 0$ when ℓ is not a multiple of 3, and

$$v_7(2^{\ell-1}) = v_7(\ell) + 1 \quad \text{for all } \ell \in 3 \cdot \mathbb{N}.$$

Then,

$$R_7(n) = \Big\lfloor \frac{n}{3} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{n}{3 \cdot 7} \Big\rfloor + \Big\lfloor \frac{n}{3 \cdot 7^2} \Big\rfloor + \ldots \geq \frac{n-2}{3}.$$

Similarly, for

$$R_5(n) \coloneqq v_5((2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \cdots (2^2 - 1)(2 - 1)),$$

we have that $v_5(2^\ell - 1) = 0$ if ℓ is not a multiple of 4, and

$$v_5(2^{\ell-1}) = v_5(\ell) + 1 \quad \text{for all } \ell \in 4 \cdot \mathbb{N}.$$

We have that
$$R_5(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4 \cdot 5^2} \right\rfloor + \ldots < \frac{5n}{16}.$$
Then, note that
$$\frac{5n}{16} > R_5(n) = v_5(k!) \geq v_7(k!) = R_7(n) \geq \frac{n-2}{3}. \tag{12}$$
Hence, $n < 32$. This means that, indeed, since only the first two terms can contribute, $R_5(n) < \frac{n}{4} + \frac{n}{20} = \frac{3n}{10}$ and, therefore,
$$\frac{3n}{10} \geq \frac{n-2}{3}. \tag{13}$$
Then, $n \leq 20$. We distinguish now several cases.

- If n is congruent to 0 modulo 3, then equation (12) can be refined to $5n/16 \geq n/3$, which never holds.
- If n is congruent to 1 modulo 3, and moreover $n < 20$, equation (13) becomes
$$\frac{n}{4} \geq \frac{n-1}{3}.$$
When $n = 1$ we get the solution $(1, 1)$. When $n = 4$, we proceed as in the previous solution to see that there are no possible solutions. All the cases corresponding to $n > 4$ are automatically excluded.
- When $n = 20$, $R_5(20) = R_7(20) = 6$. Hence, $v_5(k!) = 6$, so $25 \leq k \leq 29$. At the same time, $v_7(k!) = 6$, so $42 \leq k \leq 48$, and this is a contradicition.
- If $n < 20$ and n is congruent to 2 modulo 3, equation (13) is replaced by
$$\frac{n}{4} \geq \frac{n-2}{3},$$
so $n \leq 8$. If $n = 8$, $R_5(8) = R_7(8) = 2$. In this case, $v_5(k!) = 2$, so $10 \leq k \leq 14$, but at the same time $v_7(k!) = 2$, and this forces $14 \leq k \leq 20$. Hence, the unique option is $k = 14$, but one can easily check that the pair $(14, 8)$ does not work.
- The case $n = 5$ is discarded as before, and when $n = 2$ we get the solution $(3, 2)$.

Hence, the only possible solutions are $(3, 2)$ and $(1, 1)$.

Problem 5. The Bank of Bath issues coins with an H on one side and a T on the other. Harry has n of these coins arranged in a line from left to right. He repeatedly performs the following operation: if there are exactly $k > 0$ coins showing H, then he turns over the k-th coin from the left; otherwise, all coins show T and he stops. For example, if $n = 3$ the process starting with the configuration THT would be $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, which stops after three operations.

(a) Show that, for each initial configuration, Harry stops after a finite number of operations.

(b) For each initial configuration C, let $L(C)$ be the number of operations before Harry stops. For example, $L(THT) = 3$ and $L(TTT) = 0$. Determine the average value of $L(C)$ over all 2^n possible initial configurations C.

Comment. Before properly presenting the solutions given by the contestants, we point out that there are several straightforward ways to solve just part (a) without simultaneously solving part (b), as it will be the case with the two solutions we discuss here, due to Leonardo Costa and Albert López. For the sake of completeness, we indicate a strategy for part (a), following the script of Pablo Soto.
Assume that the process does not finish; since any configuration completely determines the subsequent movements, this would mean that we get a cycle. Suppose that we are in a position of the cycle where the number of appearances of the H is minimum, and say that at that moment we have k times that letter, with $k \geq 1$. Therefore, at position k we have the letter T (otherwise, we would move to a situation with fewer than k H's). This means that, in the following movement, we continue towards the right of the sequence, until we find a letter H. If there were no more H's beyond the initial position, that initial letter would be necessarily an H, by the conditions of the problem. When we find the first H, we switch its state, so this becomes a T, and we begin the movement towards the left, until one finds a new T. Observe in particular that at position k there is the letter H, and we do pass through it, since all the intermediate positions until the moment were H, by construction. When this happens, it becomes a T. Hence, since the state of the intermediate positions has not changed (we have gone through them exactly twice), we get a configuration with strictly fewer H's than the initial one. This is a contradiction, that comes from having supposed that the process never finishes.

Solution by Albert López Bruch. Let c_n denote the average number of operations for sequences of length n. We proceed by induction to solve both parts of the problem. For $n = 1$ it is easy, and one gets $c_1 = 1/2$.
Consider a sequence of length $n + 1$. If it finishes with a T, this does not affect the sequence of operations at all, since we never reach that position (it would require $n+1$ appearances of the H, including the last one), and hence the number of operations is the same as those needed for the word of length n obtained by deleting the last coin. Moreover, in this case the process finishes, since the induction hypothesis guarantees this.
We now take a word of length $n + 1$ finishing with an H. Say that the word is of the form $a_1a_2 \dots a_nH$. We establish a bijection between words of length $n+1$ finishing with an H and words of length n by sending

$$a_1a_2 \dots a_nH \mapsto \bar{a}_n \dots \bar{a}_2\bar{a}_1,$$

where $a_i \in \{H, T\}$ and $\bar{a}_i$ is H when a_i is T and viceversa. This bijection commutes with the operation described in the statement of the problem; moreover, it is indeed a bijection, with the inverse given by

$$a_1a_2 \dots a_n \mapsto \bar{a}_n \dots \bar{a}_2\bar{a}_1H.$$

To see that it commutes with the operation, say that after applying it to the initial word we get $a_1a_2 \dots \bar{a}_k \dots a_nH$; if we apply now the bijection we get $\bar{a}_n \dots a_k \dots \bar{a}_2\bar{a}_1$. But this is precisely the result of applying the operation to $\bar{a}_n \dots \bar{a}_2\bar{a}_1$, since this word has $n-(k-1) = n-k+1$ times the letter H, and precisely its $(n-k+1)$-th element is $\bar{a}_k$, that now gets reversed. Hence, the process arrives to a situation of $H \dots HH$. Moreover, this shows that, after the same number of operations needed in the case of length n to get all T's, we get a solution of all H's. From here, and after $n + 1$ operations, we can finish.
Therefore, we get

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{2} + \frac{c_n + n + 1}{2} = c_n + \frac{n+1}{2},$$

and by the induction hypothesis one easily concludes. The answer is just

$$c_n = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Solution by Leonardo Costa Lesage. We keep the same notations as before, where c_n stands for the expected number of movements. In this case, we proceed again by induction, but we need to consider two base cases, those being $c_1 = 1/2$ and $c_2 = 3/2$. There are three kinds of sequences of length $n+2$: (a) those finishing with a T; (b) those beginning with an H; and (c) those beginning with a T and finishing with an H. The proportion of the first two kinds is $1/2$, but the intersection is non-empty: those sequences beginning with an H and finishing with a T (proportion $1/4$) are being counted twice!
Let us determine the number of operations in all three cases, showing that the process always finishes. In the first one, since we never reach the last position (it would require $n+2$ appearances of the H), it is the same as the sequence of length $n+1$ removing the last coin. This gives an average number of c_{n+1}. In the second case, the first coin *shifts* everything by one position, and therefore we can neglect it until the end, where we get an extra move. The average is $c_{n+1}+1$. We now consider its intersection, given by the sequences beginning with a H and finishing with a T. Taking into account the previous considerations, we take the n central coins, and since until the end the coins placed in the extremes do not affect the operations, we reach a configuration of the form $HTT\ldots TT$, and therefore the average number of movements is now c_n+1.
In the third and last case, everything goes as in the second one, and after the movements corresponding to the n central positions, we get $TT\ldots TH$. From here, it takes $2n+3$ moves to finish. Observe that we have established that in all the cases the process terminates by reducing to shorter sequences where the induction hypothesis applies. Therefore,

$$c_{n+2} = \frac{c_{n+1}}{2} + \frac{c_{n+1}+1}{2} - \frac{c_n+1}{4} + \frac{c_n+2n+3}{4} = c_{n+1} + \frac{n+2}{2}.$$

We already know that $c_1 = 1/2$ and $c_2 = 3/2$, and hence we can prove by a direct induction argument that

$$c_n = \frac{n(n+1)}{4}.$$

Problemas

1. Para cada entero positivo n, sea $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de n. Por ejemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $s(n) = n$.

2. Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que para todo número real x se cumple

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1)).$$

3. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. La paralela a AC que pasa por B corta a Γ en D ($D \neq B$) y la paralela a AB que pasa por C corta a Γ en E ($E \neq C$). Las rectas AB y CD se cortan en P, y las rectas AC y BE se cortan en Q. Sea M el punto medio de DE. La recta AM corta a Γ en Y ($Y \neq A$) y a la recta PQ en J. La recta PQ corta al circuncírculo del triángulo BCJ en Z ($Z \neq J$). Si las rectas BQ y CP se cortan en X, demuestra que X pertenece a la recta YZ.
Nota. El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

4. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB||CD$ e inscrito en la circunferencia Γ. Sean P y Q dos puntos en el segmento AB (A, P, Q, B están en ese orden y son distintos) tales que $AP = QB$. Sean E y F los segundos puntos de intersección de las rectas CP y CQ con Γ, respectivamente. Las rectas AB y EF se cortan en G. Demuestra que la recta DG es tangente a Γ.

5. Don Miguel coloca una ficha en alguno de los $(n + 1)^2$ vértices determinados por un tablero de $n \times n$. Una *jugada* consiste en mover la ficha desde el vértice en que se encuentra a un vértice adyacente en alguna de las ocho posibles direcciones: $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$, siempre y cuando se salga del tablero. Un *recorrido* es una sucesión de jugadas tal que la ficha estuvo en cada uno de los $(n + 1)^2$ vértices exactamente una vez. ¿Cuál es la mayor cantidad de jugadas diagonales ($\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$) que en total puede tener un recorrido?

6. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ enteros positivos y P un polinomio con coeficientes enteros tal que, para todo entero positivo n,

$$P(n) \text{ divide a } a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n.$$

Demuestra que P es un polinomio constante.

(La duración de cada sesión fue de 4 horas y 30 minutos, y cada problema fue calificado con un número entero entre 0 y 7).

Soluciones

1. Para cada entero positivo n, sea $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de n. Por ejemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $s(n) = n$.

Solución por Andrés Saéz Schwedt. Sea S_k la suma máxima para un número de k cifras, es obvio ver y probar que $S_k = 81k$. Para $k = 4$ se tiene que $81k < 10^{k-1}$, ya que $81k = 324$ es un número de 3 cifras, por lo que ningún número n de 4 cifras puede verificar $s(n) = n$.
Dado que 10^{k-1} es una función exponencial que crece más rápidamente que $81k$ (lineal), es previsible que para todo $k > 4$ se siga cumpliendo que $10^{k-1} > 81k$, por lo que tampoco habrá números n de $k > 4$ cifras tales que $s(n) = n$. Lo probaremos por inducción:

$$10^k = 10(10^{k-1}) > 10 \cdot 81k > 81(k+1),$$

ya que $10k > k + 1$ para $k \geq 1$ (y estamos considerando $k > 4$).
A continuación probaremos que no existe ningún número n de 3 dígitos verificando $s(n) = 3$. Si lo hubiera, se tendría que $s(n) \leq S_3 = 81 \cdot 3 = 243$, por lo tanto es imposible que n sea mayor que 243. Y como el máximo valor de $s(n)$ para n en el intervalo $[100, 243]$ es $1^2 + 9^2 + 9^2 = 163$, debemos restringirnos al intervalo [100,163]. De manera análoga $1^2 + 5^2 + 9^2 = 107$ es el mayor valor posible para $s(n)$, por lo que $n \leq 107$, y finalmente se comprueba que ningún número n entre 100 y 107 provoca que $s(n)$ tenga 3 cifras.
Para números de 2 cifras, sea $n = 10a + b$, con $a \neq 0$. Si fuera $s(n) = n$, se tendría que $a^2 + b^2 = 10a + b$, en particular $b^2 - b = 10a - a^2$, o bien $b(b-1) = a(10-a)$. Pero no hay coincidencias posibles entre los valores de $b(b-1)$ y $a(10-a)$, ya que $b(b-1)$ es siempre par, y los valores pares que puede alcanzar $a(10-a)$ son solamente $2 \cdot 8 = 16$ y $4 \cdot 6 = 24$, pero las ecuaciones $b(b-1) = 16$ y $b(b-1) = 24$ no tienen solución.
En consecuencia, no hay soluciones para números n de 2 cifras, y el único de una cifra que verifica $s(n) = n$ es $n = 1$.

2. Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que para todo número real x se cumple

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1)).$$

Solución por Andrés Saéz Schwedt. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ el polinomio en cuestión. Si $n = 1$ entonces $P(x) = x - P(0)$, con lo cual $P(0) = -P(0)$, es decir $P(0) = 0$ y $P(x) = x$. A partir de ahora se supondrá $n \geq 2$.
Notamos primero que $a_0 = P(0)$. Ahora, por las relaciones de Cardano-Vieta tenemos que

$$P(0) = (-1)^n P(0)P(1) \cdots P(n-1).$$

Consideramos los siguientes casos por separado.

- $a_0 \neq 0$. Esto implica $(-1)^n = P(1) \cdots P(n-1)$, por lo que todas las raíces con excepción de a_0 deben ser $+1$ o -1. Pero 1 no puede ser raíz pues tendríamos que $P(1) = 0$, y 0 no forma parte del conjunto de raíces $\{-1, 1, a_0\}$. Además, si -1 es raíz tendríamos $P(x) = (x - a_0)(x+1)^{n-1}$, por lo que $-1 = P(1) = (1 - a_0)2^{n-1}$, de donde 2 divide a -1, lo cual es absurdo. Luego -1 tampoco es raíz. Se sigue que el polinomio debe ser de la forma $x - a_0$. Pero entonces $P(0) = -a_0$ también debe ser raíz, así que $a_0 = -a_0$, es decir $a_0 = 0$, contradicción.

- $a_0 = 0$: Tenemos $P(x) = x(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1))$, y tomando $x = 1$:
$$P(1) = (1 - P(1))(1 - P(2)) \ldots (1 - P(n-1)),$$
lo cual es imposible si $1 - P(1)$ tiene un divisor primo, ya que $\operatorname{mcd}(P(1), 1 - P(1)) = 1$.

  Por lo tanto debe ser $1 - P(1) = \pm 1$, es decir $P(1) = 0$ o $P(1) = 2$.

  Si $P(1) = 0$, signfica que 1 es raíz, luego uno de los factores $(x - P(k))$ debe ser $(x - 1)$, es decir, $P(k) = 1$ para algún k verificando $2 \leq k \leq n - 1$, y sustituyendo $x = k$ obtenemos
$$1 = k^2(k-1)(k - P(2)) \ldots (k - P(n-1)),$$
lo cual es una contradicción.

  Si $P(1) = 2$, ya podemos asegurar que n debe ser al menos 3, puesto que si fuera $n = 2$, $P(x)$ sería $(x - P(0))(x - P(1)) = x(x - 2)$, y $P(1)$ sería igual a -1 en lugar de 2.

  Al sustituir $x = 1$ se tiene $-2 = (1 - P(2)) \cdots (1 - P(n-1))$, lo cual debe ser un producto de factores $1, -1, 2$ o -2. Esto se consigue de dos maneras:

  • con un factor $1 - P(k)$ igual a 2 (es decir $P(k) = -1$), una cantidad impar de factores $1 - P(k) = -1$ ($P(k) = 2$, que junto con $P(1)$ formarán un número par de factores $(x - 2)$), y el resto de factores $1 - P(k) = 1$ ($P(k) = 0$), luego
$$P(x) = (x+1)x^a(x-2)^b, \quad \text{con } a \geq 1 \text{ y } b \geq 2 \text{ par} \tag{14}$$

  • o bien con un factor -2 y una cantidad par de factores -1, es decir
$$P(x) = x^a(x-2)^b(x-3), \quad \text{con } a \geq 1 \text{ y } b \geq 1 \text{ impar} \tag{15}$$

  En el caso (14) el grado de $P(x)$ es $n \geq 4$, luego $P(3)$ debería ser una de las raíces, que son $\{-1, 0, 2\}$, pero $P(3)$ tiene valor absoluto mayor o igual que 12, absurdo.

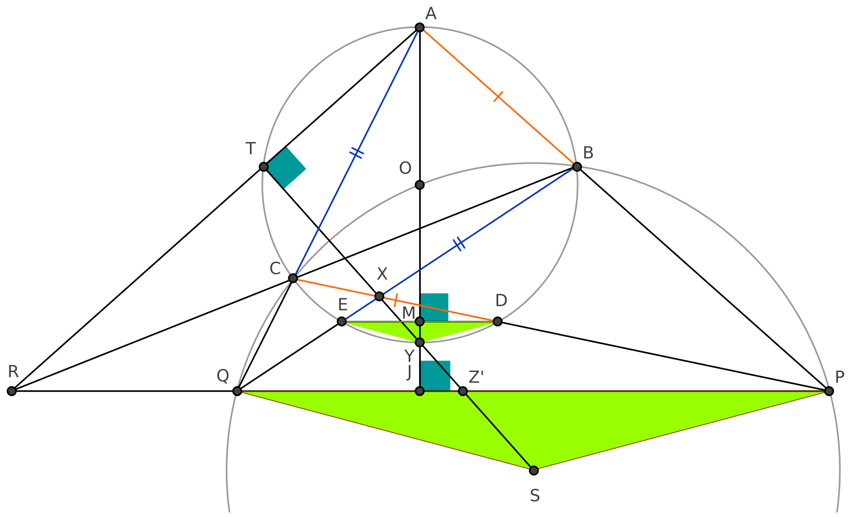
  En el caso (15), el grado no puede ser $n \leq 4$ porque está presente el factor $(x - 3)$ pero $P(0) = 0$, $P(1) = 2$, $P(2) = 0$ y $P(3) = 0$, y ninguno de los $(x - P(k))$ puede ser $(x - 3)$. Y cuando $n \geq 5$, $P(4)$ debería ser raíz, por lo tanto sólo puede tomar uno de los valores 0, 2 o 3, sin embargo su valor absoluto es mayor o igual que 8.

  En consecuencia, la única solución posible es la ya encontrada $P(x) = x$.

3. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. La paralela a AC que pasa por B corta a Γ en D ($D \neq B$) y la paralela a AB que pasa por C corta a Γ en E ($E \neq C$). Las

rectas AB y CD se cortan en P, y las rectas AC y BE se cortan en Q. Sea M el punto medio de DE. La recta AM corta a Γ en Y ($Y \neq A$) y a la recta PQ en J. La recta PQ corta al circuncírculo del triángulo BCJ en Z ($Z \neq J$). Si las rectas BQ y CP se cortan en X, demuestra que X pertenece a la recta YZ.
Nota. El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

Solución por Andrés Saéz Schwedt. Los trapecios cíclicos (inscriptibles) son siempre isósceles, en este caso se tiene que $AB = CD$ y $AC = BE$. Y dado que $\angle DCA = \angle CAB = \angle ABE$, los triángulos DCA y ABE son iguales (congruentes) por el criterio LAL, con lo cual $AD = AE$. En particular, la mediatriz del segmento DE es un eje de simetría de la figura por el cual pasan los puntos A, O, M, Y, J, siendo O el centro de Γ. Además P está en la mediatriz común de AC y BD, recta que pasa por O, y Q está en la mediatriz común de AB y CE, la cual también pasa por O.



Esquema para resolver el problema 3.

Veamos ahora que los puntos O, B, C, P, Q están en una misma circunferencia, que llamaremos ω: en efecto, por ser PO bisectriz de $\angle BPC$ y $OB = OC$, se tiene que B, C, P, O son concíclicos, y dado que QO es bisectriz de $\angle BQC$, también son concíclicos B, C, Q, O.
Por otra parte, el teorema de Rheims aplicado a los cuadriláteros cíclicos $BCQP$ y $BCED$ con las alineaciones P, D, C y Q, E, B implica que $DE||PQ$.
Lema: Veremos que $Y \to S$ en la homotecia de centro X que lleva DE en PQ.
Puesto que los triángulos DEY y PQS son isósceles, basta con ver la igualdad de un ángulo correspondiente. Utilizando ángulos orientados (dirigidos) en sentido antihorario y módulo 180, se tiene:

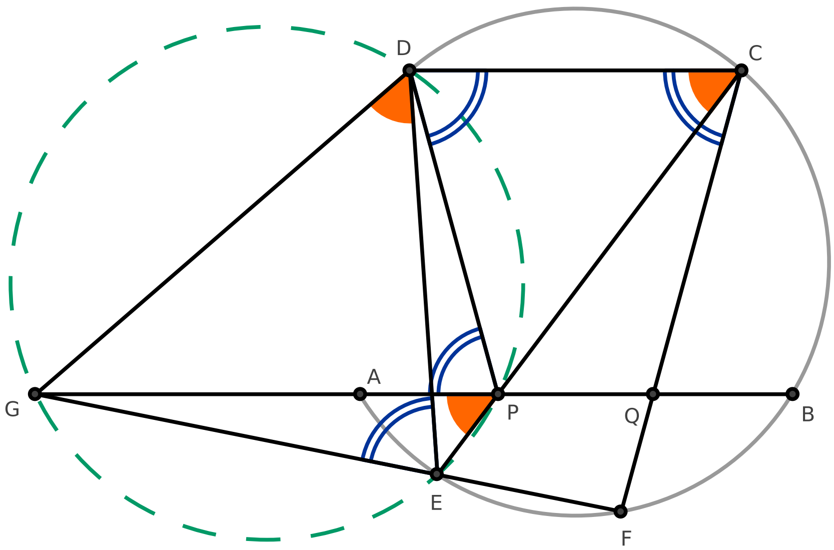
$$\measuredangle PSQ = 2\measuredangle PBQ = 2\measuredangle ABE = 2\measuredangle CAB;$$
$$\measuredangle DYE = \measuredangle DBE = \measuredangle AQB = -\measuredangle BQA = \measuredangle QAB + \measuredangle ABQ = 2\measuredangle CAB.$$

En virtud del lema, los puntos S, Y, X están alineados en una recta, que corta a PQ en Z'. El problema estará resuelto si probamos que $Z' = Z$, es decir, si los puntos B, C, J, Z' son concíclicos. Sea $R = BC \cap PQ$, punto diagonal del cuadrilátero cíclico $BCQP$, que junto con A y X forma un triángulo autopolar AXR (Brocard) del cual S es el ortocentro. En particular, las rectas AR y XS son perpendiculares y se cortan en un punto T, que pertenece a Γ.

La potencia desde R a Γ y al cuadrilátero cíclico $ATJZ'$ (inscrito en la circunferencia de diámetro AZ') permite afirmar que $RB \cdot RC = RA \cdot RT = RJ \cdot RZ'$, de donde se tiene que $BCJZ'$ es cíclico, como se quería demostrar.
Algunos casos especiales: si $AB = AC$ resulta que el circuncírculo de BCJ es tangente a PQ, y no existe otro $Z \neq J$ como pide el enunciado. Si $\widehat{A}$ es recto, coinciden los puntos D, E, M, Y, mientras que P, Q se van al infinito, pero el enunciado asegura que existen.

4. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB||CD$ e inscrito en la circunferencia Γ. Sean P y Q dos puntos en el segmento AB (A, P, Q, B están en ese orden y son distintos) tales que $AP = QB$. Sean E y F los segundos puntos de intersección de las rectas CP y CQ con Γ, respectivamente. Las rectas AB y EF se cortan en G. Demuestra que la recta DG es tangente a Γ.

Solución por Andrés Saéz Schwedt. Nótese que el trapecio cíclico $ABCD$ es necesariamente isósceles, siendo C, D puntos simétricos respecto de la mediatriz de AB. Dado que P, Q también son puntos simétricos, se tiene que $\angle PDC = \angle DCQ$.



Esquema para resolver el problema 4.

Además, por ser $AB||CD$ se verifica que $\angle PDC = \angle DPG$, y el hecho de ser $CDEF$ cíclico implica que $\angle DCF = 180^o - \angle FED = \angle DEG$.
De todo lo anterior se deduce que

$$\angle DPG = \angle PDC = \angle DCQ = \angle DCF = \angle DEG.$$

Esto muestra que el cuadrilátero $DPEG$ es cíclico, de donde se obtiene que

$$\angle GDE = \angle GPE = \angle DCE,$$

y de aquí concluimos (ángulos semiinscritos) que DG es tangente a Γ.

Mathematics may not teach us to add love or subtract hate, but it gives us hope that every problem has a solution – ***Anonymous***.